Parte II: Lógica Proposicional

13 de octubre de 2017

Semántica

- Una asignación $f : \mathcal{V} \to \mathbb{2}$, induce la semántica $[\![-]\!]_f : Prop \to \mathbb{2}$.
- La asignación f satisface la fórmula ϕ si $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- f es modelo de $\Gamma \subseteq Prop$, si para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- ϕ es consecuencia lógica de Γ si todo modelo de Γ satisface ϕ.

Deducción natural

- Construcción de pruebas usando reglas de inferencias.
- Definición por inducción del conjunto $\mathcal{D}$ de derivaciones.
- ϕ se deduce de Γ, $\Gamma \vdash \phi$, si existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = \phi$.
- Pero, realmente las reglas nos permiten concluir proposiciones verdaderas a partir de hipótesis verdaderas?

El plan de la clase de hoy

- Queremos probar $\Gamma \models \phi$ implica $\Gamma \vdash \phi$.
- Si $\Gamma \models \phi$, entonces no existe ningún modelo $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$.
- Si no existe f de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \perp$. ¡Esto es lo difícil!
- Por lo tanto, $\Gamma \vdash \phi$ por RAA.

InConsistencia

- Un conjunto $\Gamma \subseteq Prop$ es **in***consistente* si $\Gamma \vdash \bot$.
- Un conjunto $\Gamma \subseteq Prop$ es *consistente* si $\Gamma \nvdash \bot$.
- Sea $\Gamma \subseteq Prop$, Γ es inconsistente si y sólo si
  Existe $\phi \in Prop$ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$.
  Para toda $\phi \in Prop$, $\Gamma \vdash \phi$.

Consecuencias de inconsistencia

- Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.
- Si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$, entonces $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Criterios de consistencia

- ¿Cómo podemos saber si un conjunto Γ es consistente?

- Para probar que $\emptyset$ es consistente (es decir $\nvdash \perp$), usamos la contra-recíproca de corrección.
- Si existe un modelo Γ, entonces Γ es consistente.

  Sea f un modelo de Γ y supongamos $\Gamma \vdash \perp$ (para llegar a una contradicción). Entonces $[\![\perp]\!]_f = 1$: la contradicción que buscábamos. Por lo tanto $\Gamma \nvdash \perp$.
- ¿ $\{p_0, \neg p_1, p_2, \neg p_3, \ldots, p_{2*k}, \neg p_{2*k+1}, \ldots\}$ es consistente?
- Para ver que un conjunto Γ es inconsistente, debemos mostrar $\Gamma \vdash \perp$!

Consistentes maximales

- ¿Será cierta la vuelta del criterio de consistencia?
- Sea Γ es consistente, ¿existe un modelo de Γ?
- Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ no tiene un modelo.
  Entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente: $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \perp$
  Por lo tanto, $\Gamma \vdash \phi$.

Consistentes maximales

- Un conjunto $\Gamma \subseteq Prop$ es *consistente maximal* si

  para todo Δ consistente, $\Gamma \subseteq \Delta$ implica $\Delta = \Gamma$.

- Prácticamente, Δ es consistente maximal si no existe $\psi \notin \Delta$, tal que $\Delta \cup \{\psi\}$ siga siendo consistente.
- Los consistentes maximales son cerrados por derivación: si Δ es consistente maximal, entonces $\Delta \vdash \phi$ implica $\phi \in \Delta$.

Consistentes maximales

- Sea Δ un conjunto maximal, entonces Δ *realiza* los conectivos.
  1 Para toda $\phi \in Prop$, $\phi \notin \Delta$ si y sólo si $\neg\phi \in \Delta$.

  2 $\phi \in \Delta$ y $\psi \in \Delta$ si y sólo si $\phi \wedge \psi \in \Delta$.

  3.a Si $\phi \in \Delta$ implica $\psi \in \Delta$, entonces $\phi \to \psi \in \Delta$.

  3.b Si $\phi \to \psi \in \Delta$, entonces $\phi \in \Delta$ implica $\psi \in \Delta$.
- En los tres casos concluimos que la proposición está en Δ, porque Δ es cerrado por derivaciones.

Consistentes maximales

- Supongamos que Δ es consistente maximal.
- Si sabemos que ciertas proposiciones están en Δ, entonces podemos saber que otras también están.
- Ejemplo: Si $\phi \in \Delta$, entonces $\psi \to \phi \in \Delta$, para todo ψ.
- Si Γ es consistente, entonces pueden existir varios Δ_i y consistentes maximales tales que $\Gamma \subseteq \Delta_i$.
- Ejemplo: $\emptyset$ es consistente (¿por qué?) y hay muuchos maximales que lo contienen.

Existencia de valuación

- Sea Δ consistente maximal, entonces para toda $\phi \in Prop$
  o bien $\phi \in \Delta$ o bien $\neg\phi \in \Delta$.
- Si Δ es consistente maximal, entonces existe un modelo de Δ.
  Definamos $f \colon \mathcal{V} \to \{0, 1\}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
f\,p_i = 1 & \text{si } p_i \in \Delta \\
f\,p_i = 0 & \text{si } p_i \notin \Delta
\end{array}
$$

  Probamos $[\![\psi]\!]_f = 1$ si y sólo si $\psi \in \Delta$, usando inducción en ψ.

Extension a maximales

- Para ver que todo conjunto consistente Γ tiene un modelo, lo extendemos a uno maximal Γ^*.
  Como las proposiciones son numerables, podemos pensarlas dadas por una lista infinita: $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$.

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \bot \\ \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \nvdash \bot \end{cases}$$

$$\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

- Γ^* es consistente maximal.

Recapitulando

- Si f es modelo de Δ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces f es modelo de Γ.

- Todo maximal tiene un modelo y todo consistente se extiende a uno maximal, por lo tanto todo consistente tiene un modelos.

- La contrarecíproca de lo anterior nos dice, si Γ no tiene un modelo, entonces Γ es inconsistente.

Teorema de completitud

Teorema

Si $\Gamma \models \phi$, *entonces* $\Gamma \vdash \phi$.

Supongamos $\Gamma \models \phi$. Entonces no existe f de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$.
Entonces, por criterio de consistencia, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.
Por lo tanto $\Gamma \vdash \phi$.