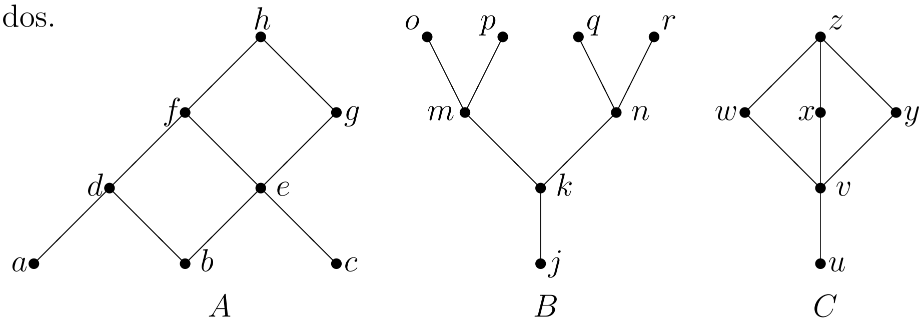
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
14/09/2018, Práctico 2: Posets.

Objetivo. Comprender la relación de cobertura en un orden parcial (poset) y su representación a través de diagramas de Hasse. Entender las nociones de máximo y mínimo de subconjuntos de un poset, distinguiéndolas de las de maximal y minimal; utilizar las nociones de máximo y mínimo para analizar supremos (sup) e ínfimos (ínf).

Nota: Se sugiere resolver los ejercicios marcados con $*$ al terminar el resto.

1. La siguiente figura muestra los diagramas de Hasse de tres conjuntos parcialmente ordenados.



   a) Para el diagrama C, liste todos los pares de la relación $\leq$.
   b) ¿Cuáles son los elementos maximales y minimales de estos conjuntos?
   c) ¿Cuáles de estos conjuntos tienen mínimo, cuáles máximo?
   d) En el diagrama A, ¿Qué elementos cubren a e?
   e) Encuentre cada uno de los siguientes, si es que existe. En cada caso determine previamente el conjunto de cotas correspondiente.

   $\sup\{d, c\}$, $\sup\{w, y, v\}$, $\sup\{p, m\}$, $\inf\{a, g\}$, $\sup\{m, n\}$ $\inf\{g, a, f\}$

2. Determine la validez de las siguientes afirmaciones para un poset $(P, \leq)$:
   a) Si P tiene elemento máximo x, entonces x es el único elemento maximal.
   b) Si P es finito y tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo.
   c$*$) Si P tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo.

3. Sea $P = \{a, b, c, d, e\}$. Construya diagramas de Hasse que representen posets formados por estos 5 elementos, y que satisfagan:
   a) El supremo de $\{a, b\}$ es c, y el ínfimo es d. Además el ínfimo de P es e.
   b) El supremo de $\{a, b\}$, el supremo de $\{a, c\}$ y el supremo de $\{b, c\}$ coinciden, y son todos el elemento d.
   c) P no tiene supremo ni ínfimo.
   d) El supremo de $\{a, b\}$ no existe puesto que $\{a, b\}$ no tienen cotas superiores.
   e) Aunque $\{a, b\}$ tiene cotas superiores, el supremo de $\{a, b\}$ no existe.

4. Considere el conjunto parcialmente ordenado $(D_{90}, |)$ de los divisores de 90:
   a) Dibuje el diagrama de Hasse de la relación “divide a”.
   b) Calcule $\sup\{6, 10\}$, $\inf\{6, 10\}$, $\sup\{30, 9\}$ y $\inf\{9, 30\}$.

5. Determine cuáles de los siguientes mapeos de P a Q son isomorfismos. En caso de no serlo determine qué es lo que falla.
   a) $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = x + 1$.
   b) $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = 2x$.
   c) $P = Q = \mathbb{Z}$ (con el orden usual), $f(x) = -x$.
   d$*$) $P = Q = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ (con la inclusión). La función f está definida de la siguiente manera. Si a, b están ambos en A, o no están ninguno de los dos en A, entonces $f(A) = A$. En otro caso f quita de A al que está y pone al que no está. Por ejemplo, $f(\{a\}) = \{b\}$ y $f(\{a, c\}) = \{b, c\}$.
   e$*$) $P = Q = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ (con la inclusión), y $f(A) = A^c$.