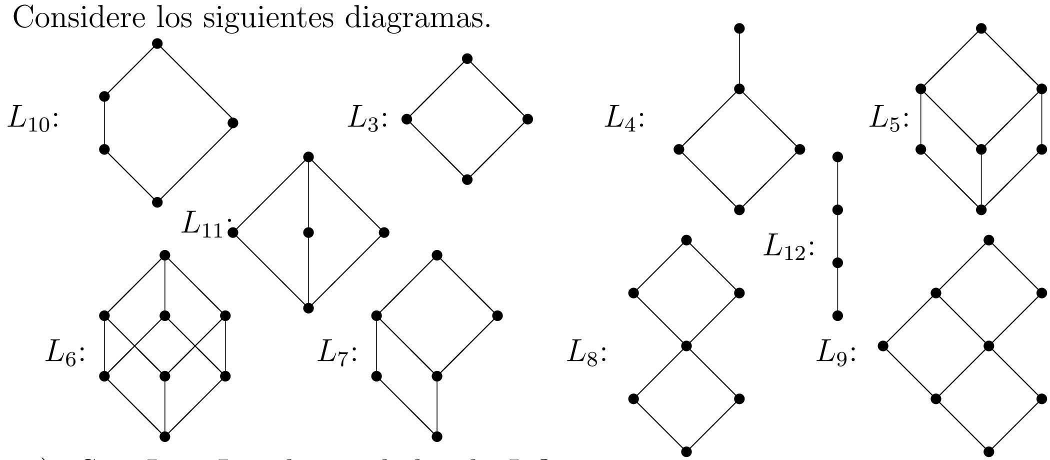
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
26/09/2018, Práctico 6: Álgebras de Boole.

**Objetivos.** Entender el concepto de subreticulado. Identificar cuando un reticulado es un álgebra de Boole. Estudiar propiedades de las álgebras de Boole. Comprender las noción de *átomos* identificando en varios reticulados aquellos elementos que lo son (en $D_n$, qué propiedad tienen los átomos?). Utilizar el teorema de representación para mostrar que un reticulado es o no un álgebra de Boole (¿Cuándo $D_n$ es un álgebra de Boole?).

1. Considere los siguientes diagramas.




   *a*) ¿Son $L_7$ y $L_8$ subreticulados de $L_9$?
   *b*) ¿Cuáles de estos reticulados tienen a $L_4$ como subreticulado? ¿Y a $L_5$?
   *c*) ¿De cuántas maneras distintas es $L_3$ subreticulado de $L_8$?
   *d*) ¿Es $L_{10}$ subreticulado de $L_6$? ¿Es $M_3$ subreticulado de $L_8$?

2. ¿Cuáles de los 8 reticulados anteriores son álgebras de Boole?

3. Sea $B$ un álgebra de Boole y $\leq$ el orden asociado a $B$. Demuestre que
   *a*) $(x^c)^c = x$;
   *b*) $x \leq y$ si y sólo si $y^c \leq x^c$;
   *c*) $y \owedge z = 0$ si y sólo si $y \leq z^c$; (¿cómo sería una propiedad similar con $y \ovee z$?)
   *d*) si $x \leq y$ e $y \owedge z = 0$ entonces $z \leq x^c$ (vea lo que hizo antes).

4. Determine cuáles de los siguientes isomorfismos valen.
*a*) $D_{78} \cong D_{385}$. *b*) $D_{12} \cong D_{18}$. *c*) $D_{2310} \cong \mathcal{P}(\{a,b,c,d,e\})$. *d*) $D_{90} \cong \mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$.

5. Considere los reticulados $L_5$, $L_{11}$ y $L_{12}$ de la figura:
   *a*) Calcule el conjunto de átomos de cada reticulado.
   *b*) Para cada uno de esos reticulados, explique por qué **no** es un álgebra de Boole.

6. *a*) Encuentre los átomos de $(D_{12}, |)$
   *b*) Encuentre los átomos de $(D_{36}, |)$.
   *c*) Muestre que los elementos 2 y 6 en $D_{12}$ no tienen complementos.

7. Considere todos diagramas, excepto $L_{11}$ y $L_{12}$, de la figura.
   *a*) Halle en cada caso $At(L)$.
   *b*) Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(At(L))$.
   *c*) Determine cuáles son álgebras de Boole.

8. Determine cuáles de los reticulados anteriores satisfacen las hipótesis del Teorema de Representación de Álgebras de Boole finitas y dé explícitamente el mapa $F$.