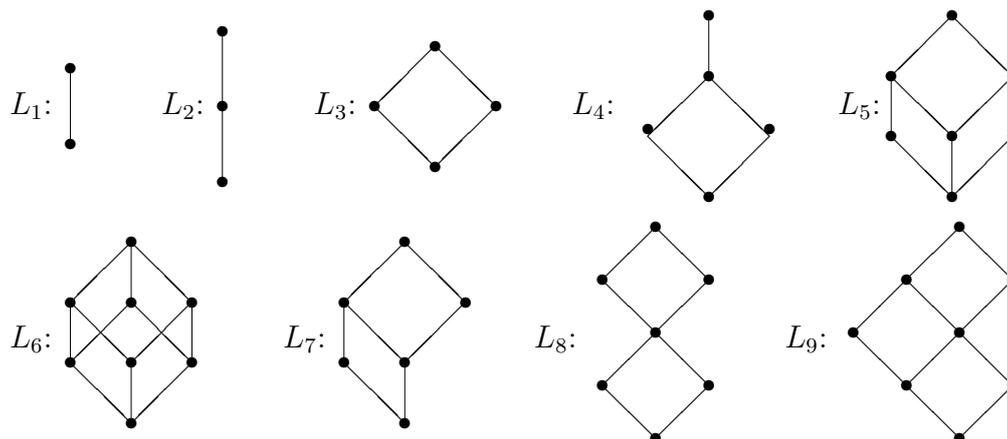


Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
 28/09/2018, Práctico 7: Teorema de Birkhoff para reticulados distributivos.

Objetivos. Comprender la noción de *elementos irreducibles* identificando en varios reticulados aquellos elementos que lo son. Entender la noción de *conjunto decreciente*; para P un poset, poder construir el poset de decrecientes de P . Utilizar el teorema de representación para mostrar que un reticulado es o no un reticulado distributivo.

1. Considere los siguientes reticulados.
 - a) Calcule el conjunto de elementos irreducibles.
 - b) Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(Irr(L))$.
 - c) Utilice el Teorema de Birkhoff para determinar si es distributivo o no.



2. Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 3 elementos irreducibles.
3. Sea n producto de primos distintos p_1, p_2, \dots, p_k , ¿cuáles son los elementos irreducibles de D_n ?
4. a) Describa de la forma más clara posible los elementos irreducibles de D_n .
 b) Determine $Irr(D_{300})$. Escriba a D_{300} como producto de cadenas.
5. Explique por qué no existe X tal que D_{60} sea isomorfo a $\mathcal{P}(X)$
6. Sean (L, \leq_L) y (M, \leq_M) posets. Considere el conjunto $L \times M$ con \preceq definida así:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \text{ si } x_1 \leq_L x_2 \text{ y } y_1 \leq_M y_2.$$
- a) Sea \mathbf{n} la cadena de n elementos. Dé el diagramas de Hasse de $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$ y de $\mathcal{P}(\{a, b\}) \times \mathbf{2}$.
- b) Pruebe que si L y M son reticulados entonces $L \times M$ también lo es. Dé explícitamente las operaciones de supremo e ínfimo.
7. ¿Es $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ subreticulado de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$?
8. Dar explícitamente el iso entre $\mathbf{2}^3$ y D_{30} .
9. ¿Es N_5 subreticulado de D_{630} ? ¿Es D_{12} subreticulado de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$?
10. Dé explícitamente isos entre:

(a) D_{12} y $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$	(b) D_{175} y $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$	(c) D_{99} y $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$
(c) D_{24} y $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$	(d) D_{875} y $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$	(e) D_{297} y $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$
11. Explique por qué no existe n tal que D_{630} sea isomorfo a $\mathbf{2}^n$
12. Determine cuándo D_n es isomorfo a algún $\mathcal{P}(X)$. Dé explícitamente el iso.
13. a) Sea $X = \{a, b, c\}$, dé explícitamente el iso entre $\mathbf{2}^3$ y $\mathcal{P}(X)$
 b) De un poset P sobre X tal que $\mathcal{D}(P)$ sea iso con $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$.