Parte III: Lenguajes y Autómatas

14 de noviembre de 2018

Repaso

Alfabeto Conjunto finito no vacío, habitualmente usamos Σ para referirnos a alfabetos.

Cadena (fijado el alfabeto) Secuencia finita de símbolos de Σ.

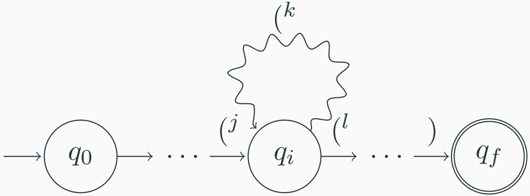
Lenguaje un subconjunto de Σ^*.

Lenguaje Regular puede ser reconocido por un AFD, o un AFN o un AFN-ϵ.

$L_{()} = \{\alpha \in \{(,)\}^* \mid$ **existe** $n\,,\, \alpha = (^n)^n\}$ **no es regular.**

Por qué hay lenguajes no regulares

- Supongamos que $L_{()}$ es regular, entonces existe un AFD A que lo reconoce.
- A tiene una cantidad finita de estados, digamos m.
- Consideremos la palabra $(^{m+1})^{m+1}$: al leer el prefijo de 0s, visitamos uno de los estados más de una vez, digamos q_i.
- Es decir hay un ciclo



- El autómata no puede distinguir entre $(^{j+k+l}$ y $(^{j+2k+l}$.
- Por lo tanto, debe aceptar $(^{j+2k+l})^{j+k+l}$

Lema de bombeo (Pumping Lemma)

Teorema
Si L es un lenguaje regular, entonces existe *una constante* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* para toda *cadena* $\alpha \in L$ *con* $|\alpha| \geqslant n$ existen *palabras* β, γ, δ *tales que* $\alpha = \beta\gamma\delta$

- $\gamma \neq \epsilon$
- $|\beta\gamma| \leqslant n$
- para toda $k \geqslant 0$, *la cadena* $\beta\gamma^k\delta \in L$.

Los cuantificadores son importantes
Si quiero demostrar que un lenguaje L dado *NO* es regular, asumo que lo es y llego a una contradicción usando el lema de bombeo.

Como es regular, existe n (no lo puedo elegir). Elijo una palabra que sé que pertenece L (usar n). Considero *TODAS* las formas de partir la palabra de acuerdo a las hipótesis, trabajo para concluir que hay una palabra que está en L pero que no debería estar (esta es la contradicción).

Hablemos de lenguajes

Puesto que un lenguaje es un subconjunto de Σ^* podemos hablar de:

vacío	$\emptyset$
total	Σ^*
complemento	$\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ o } \alpha \in L'\}$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$

Expresiones regulares

Las expresiones regulares son una forma más algebraica de definir lenguajes regulares. Fijado un alfabeto Σ las definimos inductivamente:

vacío $\emptyset \in ER_\Sigma$.

épsilon $\epsilon \in ER_\Sigma$.

símbolo Si $x \in \Sigma$, entonces $\mathbf{x} \in ER_\Sigma$.

unión Si $A, B \in ER_\Sigma$, entonces $A + B \in ER_\Sigma$.

concatenación Si $A, B \in ER_\Sigma$, entonces $AB \in ER_\Sigma$.

clausura Si $A \in ER_\Sigma$, entonces $A^* \in ER_\Sigma$.

Lenguaje de una expresión regular

Como ER_Σ fue definido inductivamente, podemos definir sus lenguajes por recursión:

vacío $L(\emptyset) = \emptyset.$

épsilon $L(\epsilon) = \{\epsilon\}.$

símbolo $L(\mathbf{x}) = \{x\}.$

unión $L(A + B) = L(A) \cup L(B).$

concatenación $L(AB) = L(A) \cup L(B).$

clausura $L(A^*) = (L(A))^*.$