Parte III: Lenguajes y Autómatas

14 de noviembre de 2018

Repaso

Alfabeto Conjunto finito no vacío, habitualmente usamos Σ para referirnos a alfabetos.

Cadena (fijado el alfabeto) Secuencia finita de símbolos de Σ.

Lenguaje un subconjunto de Σ^*.

Lenguaje Regular puede ser reconocido por un AFD, o un AFN o un AFN-ϵ.

Hablemos de lenguajes

Puesto que un lenguaje es un subconjunto de Σ^* podemos hablar de:

vacío	$\emptyset$
total	Σ^*
complemento	$\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \text{ o } \alpha \in L'\}$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$
potencias	$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ LL^k & \text{si } n = k+1 \end{cases}$
clausura	$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$

Expresiones regulares

Las expresiones regulares son una forma más algebraica de definir lenguajes regulares. Fijado un alfabeto Σ las definimos inductivamente:

vacío $\emptyset \in ER_{\Sigma}$.

épsilon $\epsilon \in ER_{\Sigma}$.

símbolo Si $x \in \Sigma$, entonces $\mathbf{x} \in ER_{\Sigma}$.

unión Si $A, B \in ER_{\Sigma}$, entonces $A + B \in ER_{\Sigma}$.

concatenación Si $A, B \in ER_{\Sigma}$, entonces $AB \in ER_{\Sigma}$.

clausura Si $A \in ER_{\Sigma}$, entonces $A^* \in ER_{\Sigma}$.

Lenguaje de una expresión regular

Como ER_Σ fue definido inductivamente, podemos definir sus lenguajes por recursión:

vacío	$L(\emptyset) = \emptyset.$
épsilon	$L(\epsilon) = \{\epsilon\}.$
símbolo	$L(\mathbf{x}) = \{x\}.$
unión	$L(A + B) = L(A) \cup L(B).$
concatenación	$L(AB) = L(A) \cup L(B).$
clausura	$L(A^*) = (L(A))^*.$

Equivalencia entre AFN-ϵ y ER

Teorema
Para toda expresión regular A*, existe un AFN-*ϵ M *tal que* $L(A) = L(M)$.

Demostración
Construimos (recursivamente) un AFN-ϵ con un *único* estado final.

Teorema (Kleene)
Para todo AFD M*, existe una ER* A *tal que* $L(M) = L(A)$.

Idea de demostración
Al consumir una palabra el autómata sale del estado inicial eventualmente vuelve al mismo, hasta que va hacia un estado final sin volver a pasar por el inicial. Damos ER para los ciclos y para otros caminos eliminando estados.

Eliminación de estados

En general, un camino del estado n al estado m se puede dividir en ciclos sobre n y luego salir de n para llegar a m sin pasar de nuevo por n.

$$L_{n\,m}(R) = (I_n(R))^* F_{n\,m}(R)$$

Un ciclo sobre n lo dividimos en ciclos triviales y en las formas de salir a s y llegar a n desde otro estado t, sin volver a pasar por n en el medio:

$$I_n(R) = \sum_{n \xrightarrow{c} n} c + \sum_{n \xrightarrow{a} s, t \xrightarrow{b} n} a L_{s\,t}(R \setminus \{n\}) b$$

Un camino de n a m sin pasar por n son caminos que salen de n a un estado s y de allí va a m sin pasar por n:

$$F_{n\,m}(R) = \sum_{n \xrightarrow{a} s} a L_{s\,m}(R \setminus \{n\})$$

Eliminación de estados

En esta filmina f, m, n, s, t son estados, R es un conjunto de estados.

$$L_{n\,m}(R) = \emptyset \quad \text{si } n \notin R \text{ ó } m \notin R$$

$$L_{n\,m}(R) = \begin{cases} (I_n(R))^* & \text{si } n = m \\ (I_n(R))^* F_{n\,m}(R) & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

$$I_n(R) = \sum_{n \xrightarrow{c} n} c + \sum_{n \xrightarrow{a} s,\, t \xrightarrow{b} n} a L_{s\,t}(R \setminus \{n\}) b$$

$$F_{n\,m}(R) = \sum_{n \xrightarrow{a} s} a L_{s\,m}(R \setminus \{n\})$$

La ER completa suma las ER desde el estado inicial a los estados finales

$$L(M) = \sum_{f \in F} L_{0\,f}(Q)$$