Parte III: Lenguajes y Autómatas

25 de octubre de 2019

Alfabeto Conjunto finito no vacío, habitualmente usamos Σ para referirnos a alfabetos.

Cadena (fijado el alfabeto) Secuencia finita de símbolos de Σ.

Lenguaje un subconjunto de Σ^*.

Lenguaje Regular puede ser reconocido por un AFD.

Hablemos de lenguajes

Puesto que un lenguaje es un subconjunto de Σ^* podemos hablar de:

vacío	$\emptyset$
total	Σ^*
complemento	$\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$
intersección	$L \cap L' = \{\alpha \,\vert\, \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$
unión	$L \cup L' = \{\alpha \,\vert\, \alpha \in L \text{ o } \alpha \in L'\}$
concatenación	$LL' = \{\alpha\beta \,\vert\, \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$

Autómatas finitos deterministas (AFD)

Un *autómata finito determinista* A es una tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde:

1. Un conjunto finito de estados Q.
2. Un alfabeto Σ.
3. Una función de transición $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$.
4. Un estado inicial $q_0 \in Q$.
5. Un conjunto de estados finales $F \subseteq Q$.

Extendemos δ a palabras:

$$\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$$
$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$
$$\hat{\delta}(q, x\alpha) = \hat{\delta}(\delta(q, x), \alpha)$$

El lenguaje del autómata A

$$L_A = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \alpha) \in F\}$$

Dado un lenguaje cualquiera L, diremos que L es *regular* si existe un autómata finito determinista A tal que $L = L_A$.

Observación: puede haber estados inalcanzables
Si $q' \in Q$, no necesariamente existen $q \in Q, x \in \Sigma$ con $\delta(q, x) = q'$.

Puesto que un lenguaje es un subconjunto de Σ^* podemos hablar de:

vacío $\emptyset$

total Σ^*

complemento $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$

intersección $L \cap L' = \{\alpha \,|\, \alpha \in L \text{ y } \alpha \in L'\}$

unión $L \cup L' = \{\alpha \,|\, \alpha \in L \text{ o } \alpha \in L'\}$

concatenación $LL' = \{\alpha\beta \,|\, \alpha \in L \text{ y } \beta \in L'\}$

¿Asumiendo que L, L' son regulares, son todas esas construcciones regulares también?

Ejercicios

- Definir un AFD A tal que $L(A) = \emptyset$.
- Definir un AFD A tal que $L(A) = \Sigma^*$.
- Definir un AFD A que reconozca palabras que comiencen con ba y terminen con ab.
- Sea A un AFD, construya un AFD A' tal que $L(A') = L(\bar{A})$.

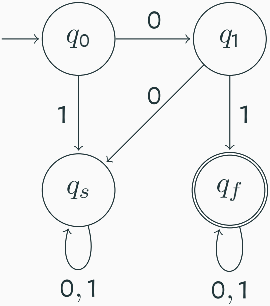
Equivalencia de Autómatas

Dos autómatas A, A' son *equivalentes* si $L_A = L_{A'}$.

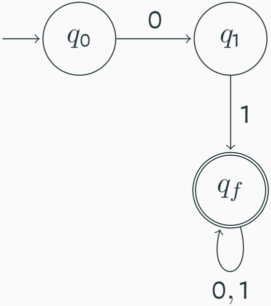
A continuación veremos otra clase de autómatas tales que todo AFD es equivalente a uno de nuestra clase (y viceversa).

Ejemplo: palabras que empiezan con 01

Determinista



No-determinista



Formalizando NFA

Un *autómata finito no-determinista* A consta (está determinado por) los siguientes componentes:

1. Un conjunto finito de estados Q.
2. Un alfabeto Σ.
3. Una función de transición (que codifica las aristas de la representación gráfica) $\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$.
4. Un estado inicial $q_0 \in Q$.
5. Un conjunto de estados finales $F \subseteq Q$.

El único cambio está en la función de transición.

Aceptación para NFA

Informalmente la aceptación para un NFA está dada por la existencia de un camino que consume la palabra y termina en un estado final.

Como $\delta(p,q)$ es un conjunto de estados no podemos definir la extensión de δ tan sencillamente.

$$\hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$

$$\hat{\delta}(q,\epsilon) = \{q\}$$

$$\hat{\delta}(q,x\alpha) = \bigcup_{q' \in \delta(q,x)} \hat{\delta}(q',\alpha)$$

El lenguaje del autómata A son las palabras que comenzando en el estado inicial terminan (según $\hat{\delta}$) en uno final:

$$L_A = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,\alpha) \cap F \neq \emptyset\}$$

Todo AFD tiene un AFN equivalente

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ definimos

$$\delta_N : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$
$$\delta_N(q, x) = \{\delta(q, x)\}$$

Todo AFN tiene un AFD equivalente (método perezoso)

Intuición
Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ el AFN, construimos un AFD A_D donde el conjunto de estados $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q)$.

Estados Comenzamos definiendo $q_0^D = \{q_0\}$ y por lo tanto $q_0^D \in Q_D$.
Luego para cada $P \in Q_D$ y $x \in \Sigma$, calculamos

$$q_{P,x} = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x) \text{ y lo agregamos a } Q_D$$

Transiciones

$$\delta_D \colon Q_D \times \Sigma \to Q_D$$

$$\delta_D(P, x) = q_{P,x}$$

Estados finales

$$F_D = \{P \in Q_D \mid P \cap F \neq \emptyset\}$$

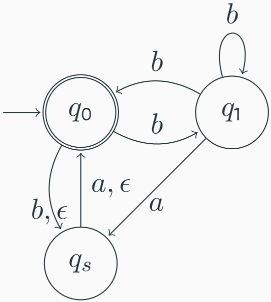
Todo AFN tiene un AFD equivalente (fuerza bruta)

Dado un AFN $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ definimos un AFD A_D donde el conjunto de estados $Q_D = \mathcal{P}(Q)$.

$$\delta_D \colon \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$

$$\delta_D(P, x) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x)$$

Intuición
Las transiciones ϵ no consumen ningún símbolo de la palabra.



¿Cuáles son los movimientos posibles con el símbolo a desde q_0?

Las transiciones ϵ nos permiten deducir $\delta(q, a) = \{q_0, q_s\}$.

AFN con transiciones ϵ (AFN-ϵ)

Formalmente
Asumimos $\epsilon \notin \Sigma$, la función de transición debe indicar a qué estados llegamos con cada $x \in \Sigma$ y con ϵ.

$$\delta \colon Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathcal{P}(Q)$$

Para definir formalmente $\hat{\delta}$ necesitamos la noción de clausura-ϵ.

primeros para estados

$$[q] = \{q\} \cup \{q' \in Q \mid q_m \in \delta(q, \epsilon) \text{ y } q' \in [q_m]\}$$

luego para un conjunto de estados

$$[P] = \bigcup_{q \in P} [q]$$

AFN con transiciones ϵ (AFN-ϵ)

Recordemos que usamos $[P]$ es el conjunto de estados alcanzables via ϵ movimientos desde algún estado $q \in P$.

$$\hat{\delta} \colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = [q]$$

$$\hat{\delta}(q, x\alpha) = \bigcup_{q_i \in [q]} \left(\bigcup_{q' \in \delta(q_i, x)} \hat{\delta}(q', \alpha) \right)$$

El lenguaje del autómata A

$$L_A = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \alpha) \cap F \neq \emptyset\}$$

Todo AFN-ϵ tiene un AFD equivalente (método perezoso)

Intuición
Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ el AFN, construimos un AFD A_D donde el conjunto de estados $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q)$.

Estados Comenzamos definiendo $q_0^D = [q_0]$ y por lo tanto $q_0^D \in Q_D$.
Luego para cada $P \in Q_D$ y $x \in \Sigma$, calculamos

$$q_{P,x} = \bigcup_{q \in P} [\delta(q, x)] \text{ y lo agregamos a } Q_D$$

Transiciones

$$\delta_D \colon Q_D \times \Sigma \to Q_D$$
$$\delta_D(P, x) = q_{P,x}$$

Estados finales

$$F_D = \{P \in Q_D \mid P \cap F \neq \emptyset\}$$