Introducción a la Lógica y la Computación - Lógica proposicional
04/10/2017, Práctico 4: Otras reglas de derivación

1. Complete las siguientes derivaciones agregando la rama que falta, la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. En ambas derivaciones se deben cancelar todas las hipótesis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vee Q \qquad \dfrac{P \qquad \dfrac{\neg P \wedge \neg Q}{\neg P}}{\bot} \qquad \bot}{\bot}}{\neg(P \vee Q)}}{(\neg P \wedge \neg Q) \to (\neg(P \vee Q))}
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\neg P \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P}{\neg P \vee P} \qquad \neg(\neg P \vee P)}{\bot}}{P}}{\bot}}{\neg P \vee P}$$

2. Encuentre derivaciones para:
   a) $\{\neg P \vee Q\} \vdash P \to Q$ (Usando eliminación de $\vee$)
   b) $\{\neg P \vee \neg Q\} \vdash \neg(P \wedge Q)$
   c) $\{P \to Q\} \vdash \neg P \vee Q$
   (Sugerencia: la última regla es RAA, no intente con introducción de $\vee$, no funciona como última regla. Aparte está desarrollado en el apunte.)
   d) $\{\neg(P \wedge Q)\} \vdash \neg P \vee \neg Q$ (Copie la idea de la derivación anterior)

3. En el ejercicio 1 se muestra una derivación (incompleta) de $P \vee \neg P$, llamado principio del tercero excluido. Una estrategia posible para demostrar una proposición R, es utilizar una eliminación del $\vee$ para subdividir la prueba en dos sub-derivaciones (también de R), cada una de las cuales tiene una hipótesis más para utilizar:

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ \vdots \\ \neg P \vee P \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [P] \\ \vdots \\ R \end{matrix} \quad \begin{matrix} [\neg P] \\ \vdots \\ R \end{matrix}}{R}$$

   Obtenga derivaciones para c y d del punto anterior usando esta estrategia.

4. Encuentre derivaciones para:
   a) $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$
   b) $\vdash (P \to Q) \wedge (\neg P \to Q) \to Q$

5. Demostrar, transformando derivaciones cuando sea necesario:
   a) $\vdash P$ implica $\vdash Q \to P$
   b) Si $P \vdash Q$ y $\neg P \vdash Q$ entonces $\vdash Q$.
   c) $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ implica $\Gamma \setminus \{P\} \vdash (P \to P) \wedge (P \to Q)$.
   d) $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ implica $\Gamma \vdash P \to (Q \vee \neg P)$.

6. Demuestra los siguientes casos de la inducción en las derivaciones que prueba el Teorema de Corrección: $(I\vee)$ y $(E\vee)$.