

Introducción a la Lógica y la Computación - Lógica proposicional  
11/10/2017, Práctico 5: Conjuntos Consistentes

1. Pruebe lo siguiente:
  - a)  $\Gamma \vdash \neg \perp$
  - b)  $\{p_0\} \not\vdash p_1$
  - c)  $\{\perp\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$
  - d)  $\{\neg p_0, \neg(p_1 \wedge (\neg p_2))\} \not\vdash p_2 \rightarrow p_0$
2. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:
  - a)  $\{\neg p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$ .
  - b)  $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \rightarrow \neg p_0, p_1 \wedge p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_2), \neg p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$ .
  - c)  $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$ .
  - d)  $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \wedge p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \rightarrow p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$   
(pares implican impares...).
  - e)  $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{3n+1} : n \geq 0\}$ .
  - f)  $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{4n+1} : n \geq 0\}$ .
3. Probar que  $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$  es consistente si y sólo si  $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$  es consistente (ayuda: contrarrecíproca).
4. Probar:
  - Si  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  es inconsistente entonces que  $\Gamma \vdash \varphi$
  - Si  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  es inconsistente entonces que  $\Gamma \vdash \neg\varphi$
5. Demostrar que  $\Gamma^+ := \{\varphi \in PROP : \varphi \text{ no contiene los conectivos "}\neg\text{" ni "}\perp\text{"}\}$  es consistente (Ayuda: construir una  $f$  tal que  $\llbracket \varphi \rrbracket_f = 1$  para toda  $\varphi \in \Gamma^+$ ).
6. Pruebe todo  $\Gamma$  consistente maximal realiza la disyunción:  
para toda  $\varphi, \psi$ , se tiene  $\varphi \vee \psi \in \Gamma$  si y sólo si  $[\varphi \in \Gamma \text{ ó } \psi \in \Gamma]$ .
7. Sea  $\Gamma$  consistente maximal y suponga  $\{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$ . Decida si las siguientes proposiciones están en  $\Gamma$ . (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).
  - a)  $\neg p_0$
  - b)  $((\neg p_1) \vee p_2)$
  - c)  $p_3$
  - d)  $p_2 \rightarrow p_5$
  - e)  $p_1 \vee p_6$
8. Dar al menos dos conjuntos  $\Gamma$  diferentes que sean consistentes maximales y contengan al conjunto  $\{p_0, \neg(p_1 \rightarrow p_2), p_3 \vee p_2\}$
9. ¿Es el siguiente conjunto consistente maximal?  
 $\{\varphi \in PROP : \{p_0, p_1, p_3, \dots\} \vdash \varphi\}$
10. ¿Es el subconjunto de  $PROP$  formado por las tautologías un consistente maximal?