Relación de Orden Parcial

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de **reflexividad**, **antisimetría** y **transitividad**

Notación: $a \leq b$ en lugar de $(a, b) \in R$

Relación de Orden Parcial

Ejemplos:

1. **Relación de orden usual** sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{Z}$): Si a y b son números, entonces $a \leq b$ refleja la relación de orden dada por la representación geométrica de la recta, salvo que se diga explícitamente otra cosa.
2. La relación definida por $a \leq b$ si y sólo si a divide a b (sobre $\mathbb{N}$) es una relación de orden. También utilizamos $a|b$.
3. $X \leq Y$ si y sólo si $X \subseteq Y$ (sobre $\mathcal{P}(A)$) es una relación de orden

Diagramas de Hasse

Definición de la relación cubrimiento
Sea A un conjunto y $\leq$ un orden parcial sobre A. Sean $a, b \in A$ elementos distintos. Decimos que b *cubre* a a si $a \leq b$ y no existe c distinto de a y b tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Definición de Diagrama de Hasse
Consiste de puntos llamados **vértices** que representan los elementos del conjunto y de **arcos** o **segmentos ascendentes** que unen pares de vértices de la siguiente manera:

a está conectado con b mediante un arco ascendente si y sólo si b cubre a a.

Conjunto Parcialmente Ordenado (CPO o POSET)

Es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ es un orden parcial sobre P

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}, \leq)$ es un POSET
2. $(\mathbb{N}, |)$ es un POSET
3. $(\{1, 2, 3, 5, 6, 8\}, |)$ es un POSET
4. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ es un POSET

Máximos y Mínimos

$(P, \leq)$ un POSET

- a es mínimo de P si para todo x en P se tiene $a \leq x$
- a es máximo de P si para todo x en P se tiene $x \leq a$

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $([0, 1), \leq)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
4. $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
5. $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

Maximales y Minimales

$(P, \leq)$ un POSET

- a es **minimal** de P si para todo x en P, $x \leq a$ implica que $x = a$
- a es **maximal** de P si para todo x en P, $a \leq x$ implica que $a = x$

¿Cuáles de los siguientes tienen maximales y/o minimales?

1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $([0, 1), \leq)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
4. $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
5. $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

Orden Total o Cadena

Un *orden total* sobre un conjunto P es un orden parcial $\leq$ sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \;\text{ o }\; b \leq a.$$

Algunos ejemplos de órdenes totales:

1. El orden $\leq$ en $\mathbb{R}$
2. El orden lexicográfico en un diccionario.

Supremos e Ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y sea $S \subseteq P$.

1. $a \in P$ se dice *cota superior* de S si para todo $b \in S$ ocurre que $b \leq a$.
2. $a \in P$ se dice *cota inferior* de S si para todo $b \in S$ ocurre que $a \leq b$.
3. $a \in P$ se dice *supremo* de S si a es una cota superior de S y para toda cota superior b de S se cumple que $a \leq b$.
4. $a \in P$ se dice *ínfimo* de S si a es una cota inferior de S y para toda cota inferior b de S se cumple que $b \leq a$.

Isomorfismo de POSETS

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Diremos que f es un **isomorfismo** si f es biyectiva y para todo $x, y \in P$, se cumple que

$x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq' f(y)$

Propiedad Fundamental de los Isomorfismos

Lema

Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ posets. Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo.

1. Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y sólo si existe $\sup(f(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $f(\sup(S)) = \sup(f(S))$.
2. Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\inf(S)$ si y sólo si existe $\inf(f(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $f(\inf(S)) = \inf(f(S))$.