

La propiedad de Distributividad

Lema:

Sea L un reticulado; entonces son equivalentes:

- 1 Para todo $x, y, z \in L$,
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
- 2 Para todo $x, y, z \in L$,
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

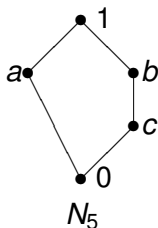
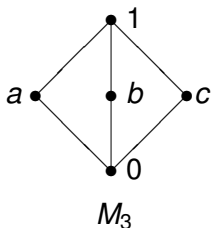
Reticulados Distributivos

Sea L un reticulado, entonces L se dice **distributivo** si satisface alguna de las propiedades del Lema.

Ejemplos:

- 1 \mathbb{N} con el orden usual es distributivo
- 2 $[0, 1)$ con el orden usual es distributivo
- 3 $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ es distributivo
- 4 D_n es distributivo

Casos paradigmáticos de no distributividad



$$c \vee (b \wedge a) \neq (c \vee b) \wedge (c \vee a)$$

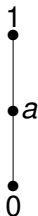
$$b \wedge (c \vee a) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$$

Distributividad implica complemento único

Lema:

Si L es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a **lo sumo** un complemento.

Notar que puede **no haber** complementos, por ejemplo



Criterio para analizar distributividad

Lema:

Un reticulado es distributivo si y sólo si no contiene subreticulados isomorfos a M_3 ni N_5 .

Resumen de criterios para analizar distributividad

Para comprobar la distributividad de L :

- 1 Ver que L es subreticulado de algún reticulado de la forma $\mathcal{P}(X)$ o D_n .

Para refutar la distributividad de L :

- 1 Ver que existe un elemento con más de un complemento.
- 2 Ver que contiene como subreticulados a M_3 o N_5 .

Álgebras de Boole

Es una estructura del tipo $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$, donde B es un conjunto no vacío, y además satisface:

- 1 $\langle B, \vee, \wedge \rangle$ es un reticulado distributivo
- 2 Para todo $x \in B$ se tiene

$$0 \leq x \quad x \leq 1$$

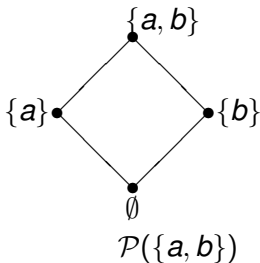
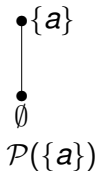
- 3 para cada $x \in L$, se tiene que

$$x \vee x' = 1, \quad x \wedge x' = 0$$

Álgebra de Boole de conjuntos

Sea X un conjunto.

Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole,



Leyes de de Morgan

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ un álgebra de Boole, entonces se cumple:

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

Isomorfismo de Álgebras de Boole

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B_1, \vee_1, \wedge_1, *, 0^{B_1}, 1^{B_1} \rangle$ Álgebras de Boole. Una función $F : B \rightarrow B_1$ se dice un *isomorfismo* si F es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee_1 F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge_1 F(y)$$

$$F(x') = (F(x))^*$$

$$F(0^B) = 0^{B_1}$$

$$F(1^B) = 1^{B_1}$$

Comparación de las nociones de Isomorfismo

Isomorfismo como posets:

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y)$$

Isomorfismo como estructura algebraica:

$$F(x \vee y) = F(x) \vee_1 F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge_1 F(y)$$

$$F(x') = (F(x))^*$$

$$F(0^B) = 0^{B_1}$$

$$F(1^B) = 1^{B_1}$$

Equivalencia de las nociones de Isomorfismo

Teorema:

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B_1, \vee_1, \wedge_1, *, 0^{B_1}, 1^{B_1} \rangle$ Álgebras de Boole y sean (B, \leq) y (B_1, \leq_1) los posets asociados. Entonces una función $F : B \mapsto B_1$ es un isomorfismo entre las estructuras $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B_1, \vee_1, \wedge_1, *, 0^{B_1}, 1^{B_1} \rangle$ si y sólo si lo es entre los posets (B, \leq) y (B_1, \leq_1) .

Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como D_6 o D_{30}) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$.

O sea, son **álgebras de conjuntos**.

¿Será cierto que todas las Álgebras de Boole son álgebras de conjuntos?

(En tal caso estaríamos en presencia de una abstracción "poco abstracta")

Próximo objetivo: Teorema de Representación

Toda Álgebra de Boole **finita** B es un **álgebra de conjuntos**.
O sea, existe X tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

Pregunta inicial:

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de X ?

Átomos

Sea B un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si a cubre a 0 .

Notación: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de B .

Por ejemplo:

- 1 En $\mathcal{P}(X)$, los átomos son los conjuntos unitarios.
- 2 Los átomos de D_{12} son 2 y 3.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema A

Sea B un álgebra de Boole finita. Para todo $x \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$.

Lema B Sea B un álgebra de Boole finita, y sean $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$. Entonces existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.