Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset

Diremos que un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \text{ y } z \leq x \implies z \in D.$$

O sea, un conjunto decreciente satisface que si un elemento se encuentra en el conjunto, entonces todos los elementos menores también están.

Reticulado de conjuntos decrecientes de un poset

Denotaremos mediante $\mathcal{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P:

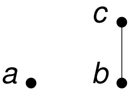
$$\mathcal{D}(P) = \{D \subseteq P : D \text{ es decreciente}\}.$$

Entonces

$$\langle \mathcal{D}(P), \cup, \cap, \emptyset, P \rangle.$$

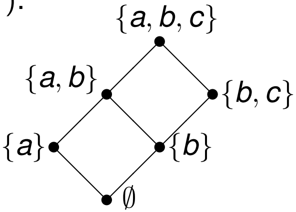
es un **reticulado es distributivo**

Ejemplo: sea P el poset



Los conj. decrecientes son: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

Forman el reticulado $\mathcal{D}(P)$:

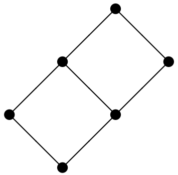


Problema de la representación de un reticulado

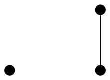
¿Será cierto que para todo reticulado distributivo L existe un poset P tal que

$$L \cong \mathcal{D}(P)$$

Dado L un reticulado, ¿cómo obtengo el P tal que $L \cong \mathcal{D}(P)$?



L



P

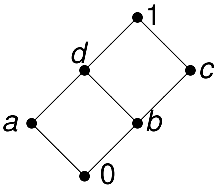
Elementos Irreducibles

Sea L un reticulado acotado. Un elemento $x \in L$ será llamado **irreducible** si

1. $x \neq 0$,
2. si $x = y \vee z$, entonces $x = y$ o $x = z$, para todo $y, z \in L$.

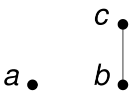
La segunda condición es equivalente a decir que x no se puede obtener como supremo de dos elementos distintos de x.

Ejemplos de Elementos Irreducibles



Elementos irreducibles: a, b, c

Forman el poset:



Poset de Elementos Irreducibles

Definición: $Irr(L) = \{i \in L : i \text{ es irreducible}\}$

Próximo objetivo: Demostrar que todo reticulado distributivo finito L es isomorfo a $\mathcal{D}(P)$, donde el poset $(P, \leq)$ asociado al reticulado L es

$$(Irr(L), \leq)$$

,
donde $\leq$ es el orden heredado de L.

Hay suficiente cantidad de Irreducibles

Lema A

Sea L un reticulado finito, y sean $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$.
Entonces existe $i \in Irr(L)$ tal que $i \leq x$ e $i \not\leq y$.

Hay suficiente cantidad de Irreducibles

Lema

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces para todo $x \in L$ se tiene:

1. $x = sup\{i \in Irr(L) : i \leq x\}$,
2. si $D \subseteq Irr(L)$ es decreciente, y $x = sup\ D$, entonces

$$D = \{i \in Irr(L) : i \leq x\}$$

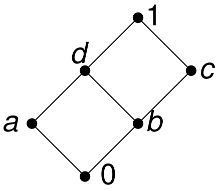
Teorema de Birkhoff

Sea L un reticulado acotado distributivo finito, y sea $P = Irr(L)$. Entonces la función

$$\begin{array}{rcl} F : L & \longrightarrow & \mathcal{D}(P) \\ x & \longrightarrow & \{y \in P : y \leq x\} \end{array}$$

es un isomorfismo entre L y $\mathcal{D}(P)$.

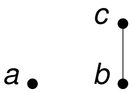
El ejemplo D_{12} completo



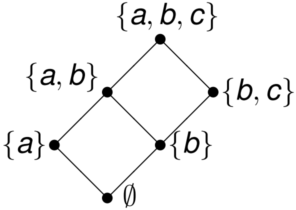
L

$Irr(L) = \{a, b, c\}$

Forman el poset:



$$\mathcal{D}(P) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$



La correspondencia F dada por el Teorema es:

$$0 \to \emptyset \qquad a \to \{a\}$$

$$b \to \{b\} \qquad d \to \{a,b\}$$

$$c \to \{b,c\} \qquad 1 \to \{a,b,d\}$$

Nuevo criterio de análisis de distributividad

Se puede observar que la única intervención de la distributividad en la prueba del Teorema de Birkhoff es para probar que F es sobre.

Criterio de análisis de distributividad

Un reticulado finito es ditributivo si y sólo si $|L| = |\mathcal{D}(Irr(L))|$

Volviendo a las Álgebras de Boole

Vale:

$At(B) = Irr(B)$

Entonces, si L es un reticulado acotado distributivo finito, se tiene:

L es álgebra de Boole si y sólo si $Irr(L) = At(L)$.

TR no vale para el caso infinito

Existe un álgebra de Boole **infinita** que no es isomorfa $\mathcal{P}(X)$, para ningún X.

Construiremos un Álgebra de Boole $\mathcal{B}$, y usaremos un argumento sobre su cardinalidad para probar que no es isomorfa a ningún álgebra de la forma $\mathcal{P}(X)$.

Cardinal de un conjunto

1. X tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre X y $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Si X no es finito, decimos que X es **infinito.**
3. X tiene cardinal **infinito numerable** si se puede encontrar una biyección entre X y $\mathbb{N}$. En tal caso se dice que X tiene cardinal $\aleph_0$.
4. Si X es infinito y no se puede encontrar tal biyección, decimos que X es **infinito no numerable.**
5. Ejemplos de conjuntos infinitos no numerables: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ambos tienen cardinal $\aleph_1$.

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < ... < \aleph_0 < \aleph_1 < ...$

1. Si X es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
2. Si X es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable.**

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < ... < \aleph_0 < \aleph_1 < ...$

1. Si X es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
2. Si X es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable.**

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

$0 < 1 < 2 <$	$\ldots$	$< \aleph_0$	$< \aleph_1 < \aleph_2 \ldots.$
$\mathcal{P}(X)$			$\mathcal{P}(X)$
(X finito)		$\downarrow$	(X infinito)

No es el cardinal
de ningún $\mathcal{P}(X)$

Conclusión: Si podemos construir un Álgebra de Boole $\mathcal{B}$ que tenga cardinal **infinito numerable** (o sea $\aleph_0$), entonces no podrá existir una biyección (ni un isomorfismo) entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{P}(X)$, para ningún X.

Construcción de $\mathcal{B}$

Un subconjunto de números naturales se dice *cofinito* si su complemento es finito.

Definimos:

$$\mathcal{B} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X \text{ es finito o cofinito}\}.$$

Entonces la estructura

$$\langle \mathcal{B}, \cup, \cap, ^{c}, \emptyset, \mathbf{N} \rangle$$

es un álgebra de Boole.