Introducción a la Lógica y la Computación

Información: http://www.cs.famaf.unc.edu.ar/wiki/

Profesores:
Mariana Badano, Raúl Fervari, Héctor Gramaglia,
Ezequiel Orbe, Miguel Pagano
Maximiliano Vilamajo (Ayudante)

Estructura de la asignatura:

Parte I: Estructuras Ordenadas

Parte II: Lógica Proposicional

Parte III: Lenguajes y Autómatas

Instancias de Evaluación

Parte I: 12/8 al 4/9

Parte II: 11/9 al 14/10

Parte III: 16/10 al 13/11

Primer Parcial: 9/9

Segundo Parcial: 28/10

Recuperatorio y Coloquio: 18/11

http://www.cs.famaf.unc.edu.ar/wiki/

Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

2015

Ejes de Contenidos

Definición de Relación

- Según la Real Academia Española, en su sentido matemático, el término significa:

  "*Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números*"

Definición de Relación

- Según la Real Academia Española, en su sentido matemático, el término significa:

  "*Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números*"

- Por ejemplo:
  - Es <u>correcto</u> afirmar que 2 es menor que 5.
  - Es <u>incorrecto</u> afirmar que 2 es divisor de 5.

Definición de Relación

- Según la Real Academia Española, en su sentido matemático, el término significa:

  "*Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números*"

- Por ejemplo:
  - Es correcto afirmar que 2 es menor que 5.
  - Es incorrecto afirmar que 2 es divisor de 5.

- O sea:
  - La comparación de 2 con 5 arroja resultado positivo, si el criterio de comparación es "*ser menor que*"
  - La comparación de 2 con 5 arroja resultado negativo, si el criterio de comparación es "*ser divisor de*"

Definición Formal

Sean A y B dos conjuntos, una relación R entre A y B será un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

O sea: $R \subseteq A \times B$

Ejemplo

$A = \{2, 4, 8, 10\}$

$B = \{1, 3, 9\}$

La relación "*es menor que*" se representa matemáticamente mediante el siguiente subconjunto de $A \times B$:

$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$

Ejemplo

$A = \{2, 4, 8, 10\}$

$B = \{1, 3, 9\}$

La relación "*es menor que*" se representa matemáticamente mediante el siguiente subconjunto de $A \times B$:

$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$

Entonces la afirmación:

- "2 es menor que 9" se formaliza expresando $(2, 9) \in R$
- "4 no es menor que 1" se formaliza expresando $(4, 1) \notin R$

Notación

- Si R es una relación entre A y A, decimos que R es una relación **sobre** A

Notación

- Si R es una relación entre A y A, decimos que R es una relación **sobre** A
- Si R es una relación sobre A, y $(a, b) \in R$, entonces escribimos

  $$a \sim_R b$$

  o simplemente

  $$a \sim b$$

Tipos fundamentales de relaciones

- **Funciones**
  No serán abordadas en este curso

Tipos fundamentales de relaciones

- **Funciones**
  No serán abordadas en este curso
- **Relaciones de equivalencia**
  Esta clase:
  su vinculación con las particiones de un conjunto

Tipos fundamentales de relaciones

- **Funciones**
  No serán abordadas en este curso
- **Relaciones de equivalencia**
  Esta clase:
  su vinculación con las particiones de un conjunto
- **Relaciones de orden**
  Casi la totalidad de la primera parte de la materia

Propiedades de las relaciones

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si para todo a en A, $a \sim a$

Propiedades de las relaciones

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si para todo a en A, $\quad a \sim a$
- **simétrica** si y sólo si para todo $a, b \in A$,

  $a \sim b$ implica que $b \sim a$

Propiedades de las relaciones

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si para todo a en A, $\quad a \sim a$
- **simétrica** si y sólo si para todo $a, b \in A$,

  $a \sim b$ implica que $b \sim a$
- **antisimétrica** si y sólo si para todo $a, b \in A$

  $a \sim b$ y $b \sim a$ implican que $a = b$

Propiedades de las relaciones

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si para todo a en A, $a \sim a$
- **simétrica** si y sólo si para todo $a, b \in A$,

  $a \sim b$ implica que $b \sim a$
- **antisimétrica** si y sólo si para todo $a, b \in A$

  $a \sim b$ y $b \sim a$ implican que $a = b$
- **transitiva** si y sólo si para todo a, b y c,

  $a \sim b$ y $b \sim c$ implican que $a \sim c$

Ejemplo 1: Relación "divide"

Es la relación sobre **Z** definida mediante:

$a \sim b$ si y sólo si a es divisor de b

Ejemplo 1: Relación "divide"

Es la relación sobre **Z** definida mediante:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } a \text{ es divisor de } b$$

En cursos anteriores se utilizó la notación $a|b$

Ejemplo 1: Relación "divide"

Es la relación sobre **Z** definida mediante:

$a \sim b$ si y sólo si a es divisor de b

En cursos anteriores se utilizó la notación $a|b$

¿Cuáles de las 4 propiedades son satisfechas por la relación divide?

Ejemplo 2: Relación "congruente módulo k"

Dado un k fijo, es la relación sobre **Z** definida mediante:

$$a \sim_k b \text{ si y sólo si } k \text{ es divisor de } b - a$$

Ejemplo 2: Relación "congruente módulo k"

Dado un k fijo, es la relación sobre **Z** definida mediante:

$$a \sim_k b \text{ si y sólo si } k \text{ es divisor de } b - a$$

En cursos anteriores se utilizó la notación $a \equiv b \; mod(k)$

Ejemplo 2: Relación "congruente módulo k"

Dado un k fijo, es la relación sobre **Z** definida mediante:

$a \sim_k b$ si y sólo si k es divisor de $b - a$

En cursos anteriores se utilizó la notación $a \equiv b \; mod(k)$

¿Cuáles de las 4 propiedades son satisfechas por la relación "congruente módulo k"?

Relaciones de equivalencia

Son las relaciones que satisfacen las propiedades **reflexividad, simetría y transitividad**

Relaciones de equivalencia

Son las relaciones que satisfacen las propiedades **reflexividad, simetría y transitividad**

Por ejemplo, la relación "congruente módulo k" es una relación de equivalencia, cualquiera sea k

Clases de equivalencia de un Rel. de Equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.

La *clase de equivalencia de* x se denota por $[x]$ y es el conjunto

$$[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$$

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.

La *clase de equivalencia de* x se denota por $[x]$ y es el conjunto

$$[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$$

Por ejemplo, en la relación "congruente módulo 3",

$$[0] = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, ...\}$$
$$[1] = \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, ...\}$$
$$[2] = \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, ...\}$$
$$[3] = [0]$$
$$[4] = [1]$$

....

Partición de un conjunto

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Partición de un conjunto

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Por ejemplo, las siguientes son distintas particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

$$P_1: \quad \{a\}, \{b\}, \{c\};$$
$$P_2: \quad \{a\}, \{b, c\};$$
$$P_3: \quad \{a,\ b,\ c\}.$$

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto A y sean x, y elementos de A. Entonces

1. $[x] = [y]$ si y sólo si $x \sim y$.
2. si $x \not\sim y$, entonces $[x]$ e $[y]$ son disjuntas.

Relación de equivalencia y Partición

Son conceptos duales

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces las clases de equivalecia determinan una partición de A

Sea $P_1, P_2, \ldots$ una partición de A, entonces la relación definida mediante $a \sim b$ si y sólo si existe k tal que $a, b \in P_k$ es una relación de equivalecia sobre A

Relación de Orden Parcial

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de **reflexividad**, **antisimetría** y **transitividad**

Relación de Orden Parcial

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de **reflexividad**, **antisimetría** y **transitividad**

Notación: $a \leq b$ en lugar de $(a, b) \in R$

Relación de Orden Parcial

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de **reflexividad**, **antisimetría** y **transitividad**

Notación: $a \leq b$ en lugar de $(a, b) \in R$

Ejemplos:

1. Si a y b son números, entonces $a \leq b$ denota la relación de orden usual sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{Z}$), salvo que se diga explícitamente otra cosa.
2. $a \leq b$ si y sólo si a divide a b sobre $\mathbb{N}$, (se puede usar $a|b$)
3. $X \leq Y$ si y sólo si $X \subseteq Y$ sobre $\mathcal{P}(A)$