Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

Clase del 26 de agosto de 2015

Reticulados complementados

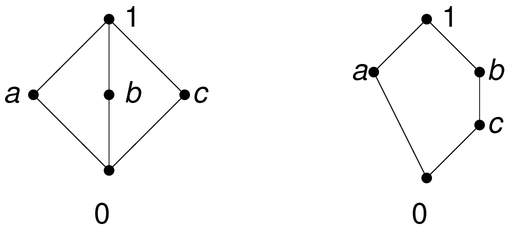
Sea L un reticulado y sea $x \in L$. Decimos que x es **complementado** si existe $y \in L$ tal que

$$x \vee y = 1^L \qquad x \wedge y = 0^L$$

L será un **reticulado complementado** si todos sus elementos tienen al menos 1 complemento.

Falla Estructural

El complemento no está determinado por la estructura de orden, como lo están las operaciones supremo e ínfimo.



La propiedad de Distributividad

Lema:
Sea L un reticulado; entonces son equivalentes:

1. Para todo $x, y, z \in L$,
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2. Para todo $x, y, z \in L$,
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

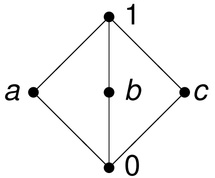
Reticulados Distributivos

Sea L un reticulado, entonces L se dice **distributivo** si satisface alguna de las propiedades del Lema.

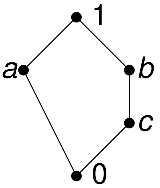
Ejemplos:

1. $\mathbb{N}$ con el orden usual es distributivo
2. $[0, 1)$ con el orden usual es distributivo
3. $\mathcal{P}(\{a, b, c\}$ es distributivo
4. D_n es distributivo

Casos paradigmáticos de no distributividad



M_3



N_5

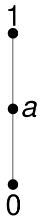
$$c \vee (b \wedge a) \neq (c \vee b) \wedge (c \vee a)$$

$$b \wedge (c \vee a) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$$

Distributividad implica compleménto único

Lema:
Si L es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a **lo sumo** un complemento.

Notar que puede **no haber** complementos, por ejemplo



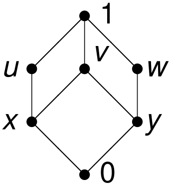
Noción de subreticulado

Sea L un reticulado. Un subconjunto $M \subseteq L$ será llamado *subreticulado* de L si

1. $M \neq \emptyset$,
2. para todo $x, y \in M$, se tiene que $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Por ejemplo:

Considere el reticulado



$\{0, x, y, 1\}$ no es subreticulado

$\{0, u, w, 1\}$ es subreticulado

Criterio para analizar distributividad

Lema:

Un reticulado es distributivo si y sólo si no contiene subreticulados isomorfos a M_3 ni N_5.

Resumen de criterios para analizar distributividad

Para comprobar la distributividad de L:

1. Ver que L es subreticulado de algún reticulado de la forma $\mathcal{P}(X)$ o D_n.

Para refutar la distributividad de L:

1. Ver que existe un elemento con más de un complemento.
2. Ver que contiene como subreticulados a M_3 o N_5.

Álgebras de Boole

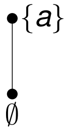
Es una estructura del tipo $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$, donde B es un conjunto no vacío, y además satisface:

1. $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo
2. Para todo $x \in B$ se tiene
$$0 \leq x \qquad x \leq 1$$
3. para cada $x \in L$, se tiene que
$$x \vee x' = 1, \qquad x \wedge x' = 0$$

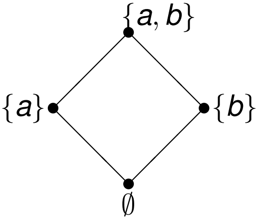
Álgebra de Boole de conjuntos

Sea X un conjunto.

Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole,



$\mathcal{P}(\{a\})$



$\mathcal{P}(\{a, b\})$

Leyes de de Morgan

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole, entonces se cumple:

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$
$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$