La propiedad de Distributividad

Lema:
Sea L un reticulado; entonces son equivalentes:

1. Para todo $x, y, z \in L$,
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2. Para todo $x, y, z \in L$,
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

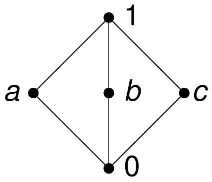
Reticulados Distributivos

Sea L un reticulado, entonces L se dice **distributivo** si satisface alguna de las propiedades del Lema.

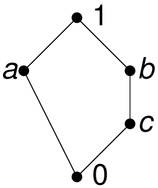
Ejemplos:

1. $\mathbb{N}$ con el orden usual es distributivo
2. $[0, 1)$ con el orden usual es distributivo
3. $\mathcal{P}(\{a, b, c\}$ es distributivo
4. D_n es distributivo

Casos paradigmáticos de no distributividad



M_3



N_5

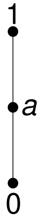
$$c \vee (b \wedge a) \neq (c \vee b) \wedge (c \vee a)$$

$$b \wedge (c \vee a) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$$

Distributividad implica compleménto único

Lema:
Si L es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a **lo sumo** un complemento.

Notar que puede **no haber** complementos, por ejemplo



Criterio para analizar distributividad

Lema:

Un reticulado es distributivo si y sólo si no contiene subreticulados isomorfos a M_3 ni N_5.

Resumen de criterios para analizar distributividad

Para comprobar la distributividad de L:

1. Ver que L es subreticulado de algún reticulado de la forma $\mathcal{P}(X)$ o D_n.

Para refutar la distributividad de L:

1. Ver que existe un elemento con más de un complemento.
2. Ver que contiene como subreticulados a M_3 o N_5.

Álgebras de Boole

Es una estructura del tipo $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$, donde B es un conjunto no vacío, y además satisface:

1. $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo
2. Para todo $x \in B$ se tiene

$$0 \leq x \qquad x \leq 1$$

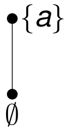
3. para cada $x \in L$, se tiene que

$$x \vee x' = 1, \qquad x \wedge x' = 0$$

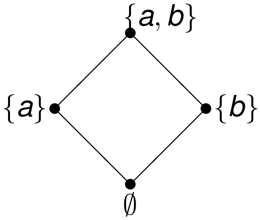
Álgebra de Boole de conjuntos

Sea X un conjunto.

Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole,



$\mathcal{P}(\{a\})$



$\mathcal{P}(\{a, b\})$

Leyes de de Morgan

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole, entonces se cumple:

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$
$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

Isomorfismo de Álgebras de Boole

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B_1, \vee_1, \wedge_1, ^*, 0^{B_1}, 1^{B_1} \rangle$ Álgebras de Boole. Una función $F : B \to B_1$ se dice un *isomorfismo* si F es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee_1 F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge_1 F(y)$$

$$F(x') = (F(x))^*$$

$$F(0^B) = 0^{B_1}$$

$$F(1^B) = 1^{B_1}$$

Comparación de las nociones de Isomorfismo

Isomorfismo como posets:

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y)$$

Isomorfismo como estructura algebraica:

$$F(x \vee y) = F(x) \vee_1 F(y)$$
$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge_1 F(y)$$
$$F(x') = (F(x))^*$$
$$F(0^B) = 0^{B_1}$$
$$F(1^B) = 1^{B_1}$$

Equivalencia de las nociones de Isomorfismo

Teorema:
Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B_1, \vee_1, \wedge_1, ^*, 0^{B_1}, 1^{B_1} \rangle$ Álgebras de Boole y sean $(B \leq)$ y $(B_1, \leq_1)$ los posets asociados.

Para toda $F : B \mapsto B_1$, son equivalentes:

1. F es un isomorfismo entre las estructuras $\langle B, \vee, \wedge, ', {}^B, 1^B \rangle$ y $\langle B_1, \vee_1, \wedge_1, ^*, 0^{B_1}, 1^{B_1} \rangle$.
2. F es un isomorfismo entre los posets $(B, \leq)$ y $(B_1, \leq_1)$.

Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como D_6 o D_{30}) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$.

O sea, son **álgebras de conjuntos.**

¿Será cierto que todas las Álgebras de Boole son álgebras de conjuntos?

(En tal caso estaríamos en presencia de una abstracción "poco abstracta")

Próximo objetivo: Teorema de Representación

Toda Álgebra de Boole **finita** B es un **álgebra de conjuntos.** O sea, existe X tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

Pregunta inicial:

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de X?

Átomos

Sea B un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si a cubre a 0.

Notación: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de B.

Por ejemplo:

1. En $\mathcal{P}(X)$, los átomos son los conjuntos unitarios.
2. Los átomos de D_{12} son 2 y 3.