Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como D_6 o D_{30}) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$. O sea, son **álgebras de conjuntos**.

Próximo objetivo: Teorema de Representación
Toda Álgebra de Boole **finita** B es un **álgebra de conjuntos**.
O sea, existe X tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

Pregunta inicial:

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de X?

Átomos

Sea B un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si a cubre a 0.

Notación: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de B.

Por ejemplo:

1. En $\mathcal{P}(X)$, los átomos son los conjuntos unitarios.
2. Los átomos de D_n son los factores primos de la descomposición de n.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema A
Sea B un álgebra de Boole finita. Para todo $x \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$.

Lema B Sea B un álgebra de Boole finita, y sean $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$. Entonces existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema

Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B se escribe de manera única como supremo de átomos.

O sea: para todo $x \in B$ se tiene:

1. $x = sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$,
2. si $A \subseteq At(B)$ y $x = sup\ A$, entonces

$$A = \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

Teorema de Representación

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole finita, y sea $X = At(B)$. La función

$$\begin{array}{rcl} F : B & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ x & \longrightarrow & \{a \in X : a \leq x\} \end{array}$$

es un isomorfismo entre $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ y $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X\rangle$.

Esquema de la Prueba del TR

Lema A

$\downarrow$

Lema B

$\downarrow$

Lema

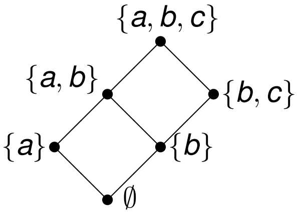
$\downarrow$

Teorema de Representación

Problema de la representación de un reticulado

Las Álgebras de Boole finitas son álgebras de conjuntos.

¿Serán los reticulados finitos reticulados de conjuntos?



Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset

Diremos que un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \text{ y } z \leq x \implies z \in D.$$

O sea, un conjunto decreciente satisface que si un elemento se encuentra en el conjunto, entonces todos los elementos menores también están.

Reticulado de conjuntos decrecientes de un poset

Denotaremos mediante $\mathcal{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P:

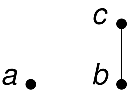
$$\mathcal{D}(P) = \{D \subseteq P : D \text{ es decreciente}\}.$$

Entonces

$$\langle \mathcal{D}(P), \cup, \cap, \emptyset, P \rangle.$$

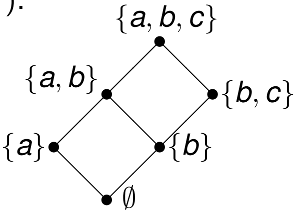
es un **reticulado es distributivo**

Ejemplo: sea P el poset



Los conj. decrecientes son: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

Forman el reticulado $\mathcal{D}(P)$:

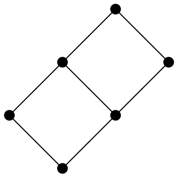


Problema de la representación de un reticulado

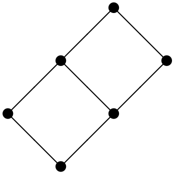
¿Será cierto que para todo reticulado distributivo L existe un poset P tal que

$$L \cong \mathcal{D}(P)$$

Dado L un reticulado, ¿cómo obtengo el P tal que $L \cong \mathcal{D}(P)$?



¿Cómo se obtiene P desde L?



$$\downarrow$$
$$\downarrow$$