TR no vale para el caso infinito

Existe un álgebra de Boole **infinita** que no es isomorfa $\mathcal{P}(X)$, para ningún X.

Construiremos un Álgebra de Boole $\mathcal{B}$, y usaremos un argumento sobre su cardinalidad para probar que no es isomorfa a ningún álgebra de la forma $\mathcal{P}(X)$.

Cardinal de un conjunto

1. X tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre X y $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Si X no es finito, decimos que X es **infinito.**
3. X tiene cardinal **infinito numerable** si se puede encontrar una biyección entre X y $\mathbb{N}$. En tal caso se dice que X tiene cardinal $\aleph_0$.
4. Si X es infinito y no se puede encontrar tal biyección, decimos que X es **infinito no numerable**.
5. Ejemplos de conjuntos infinitos no numerables: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ambos tienen cardinal $\aleph_1$.

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < ... < \aleph_0 < \aleph_1 < ...$

1. Si X es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
2. Si X es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable.**

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < ... < \aleph_0 < \aleph_1 < ...$

1. Si X es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
2. Si X es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable.**

Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

$$
\begin{array}{ccc|c|c}
0 < 1 < 2 < & \ldots & & < \aleph_0 & < \aleph_1 < \aleph_2 \ldots. \\
\mathcal{P}(X) & & & & \mathcal{P}(X) \\
(X \text{ finito}) & & & \downarrow & (X \text{ infinito})
\end{array}
$$

No es el cardinal
de ningún $\mathcal{P}(X)$

Conclusión: Si podemos construir un Álgebra de Boole $\mathcal{B}$ que tenga cardinal **infinito numerable** (o sea $\aleph_0$), entonces no podrá existir una biyección (ni un isomorfismo) entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{P}(X)$, para ningún X.

Construcción de $\mathcal{B}$

Un subconjunto de números naturales se dice *cofinito* si su complemento es finito.

Definimos:

$$\mathcal{B} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X \text{ es finito o cofinito}\}.$$

Entonces la estructura

$$\langle \mathcal{B}, \cup, \cap, {}^{c}, \emptyset, \mathbf{N} \rangle$$

es un álgebra de Boole.