Lema 3.1 Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ posets. Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo.

(a) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y sólo si existe $\sup(f(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $f(\sup(S)) = \sup(f(S))$.

(b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\inf(S)$ si y sólo si existe $\inf(f(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $f(\inf(S)) = \inf(f(S))$.

(c) P tiene 1 (resp. 0) si y sólo si Q tiene 1 (resp. 0) y en tal caso se tiene que $f(1) = 1$ (resp. $f(0) = 0$).

(d) Para cada $p \in P$, p es maximal (respectivamente minimal) si y sólo si $f(p)$ es maximal (respectivamente minimal).

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si f es un isomorfismo entonces su inversa f^{-1} también es un isomorfismo. Probemos el inciso (a). Si existe $a = \sup(S)$ entonces $x \leq a$ para todo $x \in S$. Luego $f(x) \leq' f(a)$ para todo $f(x) \in f(S)$. Esto dice que $f(a)$ es una cota superior de $f(S)$.

Veamos ahora que $f(a)$ es la menor cota superior. Supongamos que b es una cota superior de $f(S)$, o sea $f(x) \leq b$ para todo $x \in S$. Entonces $x = f^{-1}(f(x)) \leq f^{-1}(b)$ para todo $x \in S$. Como a es el supremo de S, y $f^{-1}(b)$ resultó ser una cota superior de S, entonces $a \leq f^{-1}(b)$. Luego $f(a) \leq b$, lo que indica que $f(a)$ es la menor cota superior de $f(S)$.

Las demás demostraciones son análogas y se dejan a cargo del lector. $\square$