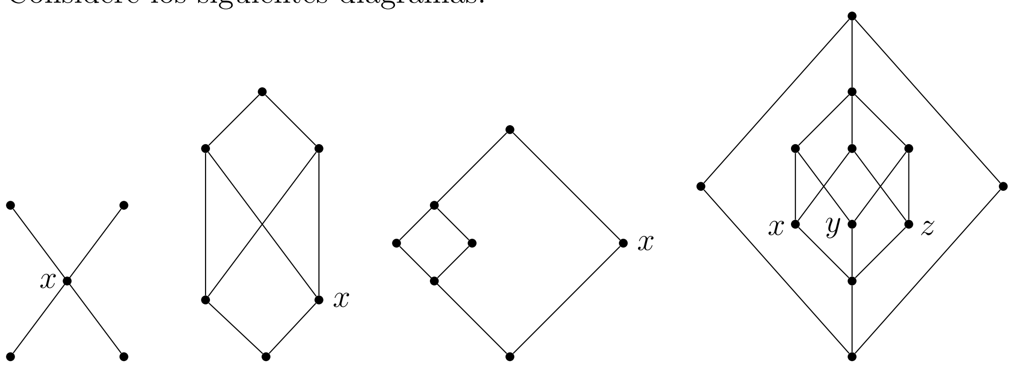
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
13/09/2017, Práctico 9: Repaso.

Objetivos. Repasar los conceptos de: poset, maximales y máximos (dualmente minimales y mínimos), la relación de cobertura para un poset; supremos e ínfimos; reticulados; complementos en reticulados acotados; subreticulados; átomos e irreducibles; reticulados distributivos.

1. Considere los siguientes diagramas:



   a) ¿Cuáles representan reticulados?
   b) ¿Cuáles son los elementos maximales en cada uno?
   c) Para cada diagrama ¿Cuáles cubren al elemento x?
   d) Para cada diagrama ¿Cuáles son los complementos de x?
   e) En el último diagrama ¿Existe $sup\{x, y, z\}$? Si existe indique cuál es.

2. Diga si es Verdadero o Falso. Justifique su afirmación.
   a) En todo poset, si $x \not\leq y$ entonces $y \leq x$.
   b) En todo poset, un elemento mínimo es también minimal.
   c) En todo poset P, cada $S \subseteq P$ tiene a lo sumo un supremo.
   d) Si el reticulado es distributivo, todos los elementos tienen complemento.
   e) Sea L' subreticulado de L y $x, y, z \in L$ tales que $x \leq y \leq z$. Si $x, z \in L'$ entonces $y \in L'$.
   f) Existe un reticulado tal que $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, para algunos x, y y z.
   g) Si en un reticulado todos los elementos irreducibles son átomos, entonces el reticulado es distributivo.

3. Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 4 elementos irreducibles, donde al menos 3 de ellos sean átomos.

4. *a*) Dé los diagramas de Hasse de D_{61}, D_{62}, D_{63} y D_{64}.
   b) En cada caso, señale los átomos y los elementos irreducibles.
   c) Dé el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(Irr(D_{63}))$.
   d) En cada caso encuentre el menor natural n tal que el reticulado sea isomorfo a D_n.
   e) En los casos en que exista, encuentre X tal que el reticulado D_n sea isomorfo a $\mathcal{P}(X)$.

5. *a*) Defina el concepto de poset reticulado.
   b) Pruebe que en todo reticulado vale la desigualdad:
   $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
   c) Sea L un reticulado distributivo finito. Pruebe que si $x = sup(D)$, donde D es un conjunto decreciente de irreducibles, entonces $D = \{i \in Irr(L) : i \leq x\}$.