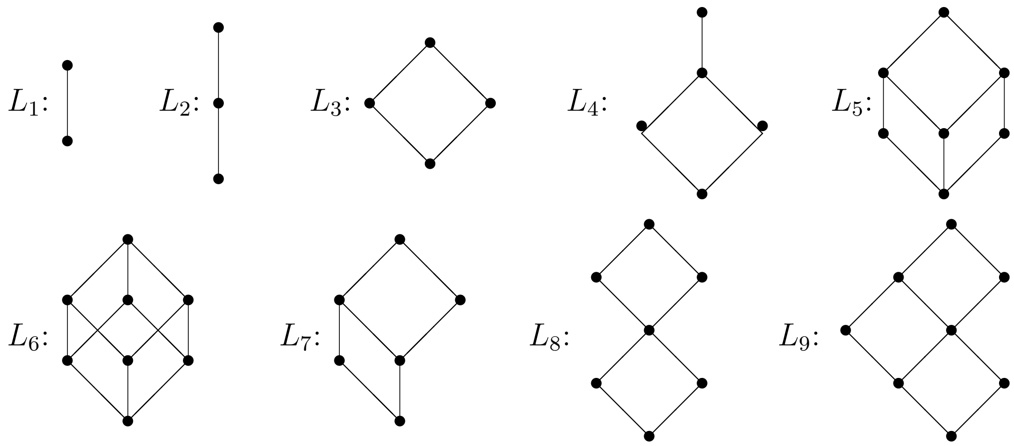
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
4/09/2019, Práctico 7: Teorema de Birkhoff para reticulados distributivos.

Objetivos. Comprender la noción de *elementos irreducibles* identificando en varios reticulados aquellos elementos que lo son. Entender la noción de *conjunto decreciente*; para P un poset, poder construir el poset de decrecientes de P. Utilizar el teorema de representación para mostrar que un reticulado es o no un reticulado distributivo.

1. Considere los siguientes reticulados.
   a) Dibuje el diagrama de Hasse del poset de elementos irreducibles.
   b) Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(Irr(L))$.
   c) Utilice el Teorema de Birkhoff para determinar si es distributivo o no.



2. Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 3 elementos irreducibles.

3. Sea n producto de primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ¿cuáles son los elementos irreducibles de D_n?

4. *a*) Describa de la forma más clara posible los elementos irreducibles de D_n.
   b) Determine $Irr(D_{300})$. Escriba a D_{300} como producto de cadenas.

5. Explique por qué no existe X tal que D_{60} sea isomorfo a $\mathcal{P}(X)$

6. Sean $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ posets. Considere el conjunto $L \times M$ con $\preceq$ definida así:
$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \text{ sii } x_1 \leq_L x_2 \text{ y } y_1 \leq_M y_2.$$
   a) Sea $\mathbf{n}$ la cadena de n elementos. Dé el diagramas de Hasse de $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$ y de $\mathcal{P}(\{a, b\}) \times \mathbf{2}$.
   b) Pruebe que si L y M son reticulados entonces $L \times M$ también lo es. Dé explícitamente las operaciones de supremo e ínfimo.

7. ¿Es $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ subreticulado de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$?

8. Dar explícitamente el iso entre $\mathbf{2}^3$ y D_{30}.

9. ¿Es N_5 subreticulado de D_{630}? ¿Es D_{12} subreticulado de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$?

10. Dé explícitamente isos entre:
    (a) D_{12} y $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ (b) D_{175} y $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ (c) D_{99} y $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$
    (c) D_{24} y $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$ (d) D_{875} y $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$ (e) D_{297} y $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$

11. Explique por qué no existe n tal que D_{630} sea isomorfo a $\mathbf{2}^n$

12. Determine cuándo D_n es isomorfo a algún $\mathcal{P}(X)$. Dé explícitamente el iso.

13. *a*) Sea $X = \{a, b, c\}$, dé explícitamente el iso entre $\mathbf{2}^3$ y $\mathcal{P}(X)$
    b) De un poset P sobre X tal que $\mathcal{D}(P)$ sea iso con $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$.