Introducción a la Lógica y la Computación - Lógica proposicional
18/09/2015, Práctico 2: Semántica, deducción y derivación

1. Pruebe lo siguiente:
   $\{p_0\} \not\models (p_0 \wedge p_1)$
   $\{p_0 \to p_1\} \models \neg p_0 \vee p_1$
   $\{p_0, p_1, p_2\} \models \neg(\neg p_0 \vee \neg p_1)$
   $\{p_0, (p_0 \to (p_1 \vee p_2)\} \not\models p_2$.
2. Pruebe que $\models \varphi \to \psi$ si y sólo si $\{\varphi\} \models \psi$.
3. Demuestre la siguiente propiedad (Coincidencia): Si f y f' coinciden en todas las p_i que ocurren en P, entonces $[\![P]\!]_f = [\![P]\!]_{f'}$
4. En cada caso, describa como debe lucir la columna izquierda de la tabla de verdad de P para que:
   $\{\neg P\} \models \ P$
   $\{\} \models \neg\ P$
   $\{P\} \models \bot$
   $\{P\} \models P \to (\bot \to \bot)$
5. Complete las siguientes derivaciones agregando la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. En la primera derivación se deben cancelar todas las hipótesis. En las segunda sólo debe quedar P sin cancelar.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \qquad \dfrac{P \qquad P \to Q}{Q}}{\bot}}{\neg P}}{\neg Q \to \neg P}}{(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{P}{Q \to P} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P \qquad \neg P}{\bot}}{Q}}{\neg P \to Q}}{(Q \to P) \wedge (\neg P \to Q)}$$

   Recuerde: $\neg P$ es una abreviatura de $P \to \bot$
6. Encuentre derivaciones para:
   a) $\{P \wedge R,\ P \to (Q \wedge R)\} \vdash Q$
   b) $\{P \to (Q \to R), \} \vdash Q \to (P \to R)$
   c) $\{P\} \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
   d) $\vdash (P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$
7. Se desea obtener una derivación para:
   $\{(\neg(p_2 \to p_5))\} \vdash \neg(\neg(\neg(p_2 \to p_5)) \wedge \neg(p_3 \to ((\neg p_2) \wedge p_5)))$
   Utilice lo hecho en el ejercicio anterior para construirla.
8. Determine cuáles son válidas. Para las que lo son, encuentre derivaciones que tengan como hipótesis el cunjunto de la izquierda, y como conclusión la proposición de la derecha.
   a) $\{\neg P,\ Q \to P\} \models R \to (Q \to \bot)$
   b) $\{\neg P\} \models Q \to (P \wedge \neg Q)$
   c) $\{\neg P\} \models Q \to (P \to \neg Q)$

9. Complete las siguiente derivación agregando la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. Sólo debe quedar $\neg Q \to \neg P$ sin cancelar.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \qquad \dfrac{\neg Q \qquad \neg Q \to \neg P}{\neg P}}{\bot}}{Q}}{(P \to Q)}$$

10. Utilizando RAA encontrar derivaciones para:
   a) $\vdash P \leftrightarrow \neg\neg P$
   b) $\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$
11. Obtenga una derivación para:
   $\vdash ((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)) \to \neg P$
   (Ayuda: la última regla es una introducción del implica)
12. Demostrar:
   a) $\{P\} \vdash \neg(\neg P \wedge Q)$
   b) $\{\neg(P \wedge \neg Q),\ \neg\neg P\} \vdash Q$
   c) $\{\neg Q\} \vdash P \to Q$
   d) $\{(\neg P \to Q),\ P \to Q\} \vdash Q$
13. Considere las siguientes implicaciones relacionadas con las leyes de De Morgan, en donde el $\vee$ es traducido como un implica utilizando la conversión $(A \vee B) = (\neg A \to B)$:
   a) $\vdash \neg(P \wedge Q) \to (P \to \neg Q)$
   b) $\vdash (P \to \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$
   Encuentre derivaciones para las mismas. Una de ellas NO debe usar RAA.