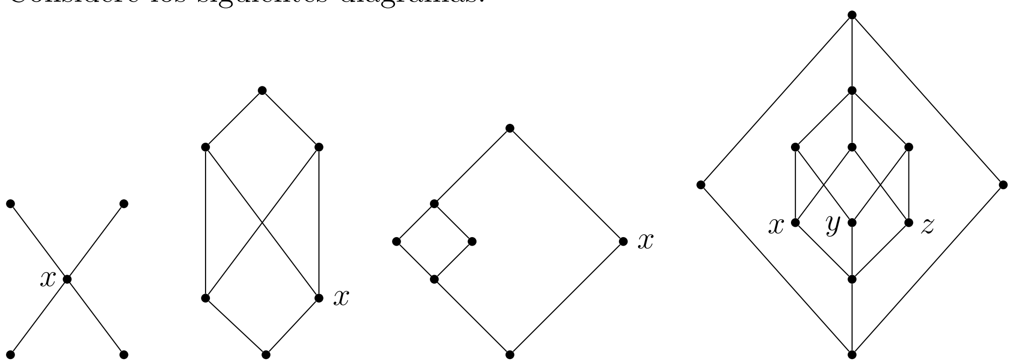
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
09/09/2015, Práctico 9: Repaso.

Objetivos. Repasar los conceptos de: poset, maximales y máximos (dualmente minimales y mínimos), la relación de cobertura para un poset; supremos e ínfimos; reticulados; complementos en reticulados acotados; subreticulados; átomos e irreducibles; reticulados distributivos.

1. Considere los siguientes diagramas:



   a) ¿Cuáles representan reticulados?
   b) ¿Cuáles son los elementos maximales en cada uno?
   c) ¿Cuáles cubren al elemento x?
   d) ¿Cuáles son los complementos de x?
   e) ¿Existe $sup\{x, y, z\}$? Si existe indique cuál es.

2. Diga si es Verdadero o Falso. Justifique su afirmación.
   a) En todo poset, si $x \not\leq y$ entonces $y \leq x$.
   b) En todo poset, un elemento mínimo es también minimal.
   c) En todo poset P, cada $S \subseteq P$ tiene a lo sumo un supremo.
   d) Si el reticulado es distributivo, todos los elementos tienen complemento.
   e) Sea L' subreticulado de L y $x, y, z \in L$ tales que $x \leq y \leq z$. Si $x, z \in L'$ entonces $y \in L'$.
   f) Existe un reticulado tal que $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, para algunos x, y y z.
   g) Si en un reticulado todos los elementos irreducibles son átomos, entonces el reticulado es distributivo.

3. Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 4 elementos irreducibles, donde al menos 3 de ellos sean átomos.

4. *a*) Dé los diagramas de Hasse de D_{61}, D_{62}, D_{63} y D_{64}.
   b) En cada caso, señale los átomos y los elementos irreducibles.
   c) Dé el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(Irr(D_{63}))$.
   d) En cada caso encuentre el menor natural n tal que el reticulado sea isomorfo a D_n.
   e) En los casos en que exista, encuentre X tal que el reticulado D_n sea isomorfo a $\mathcal{P}(X)$.

5. *a*) Defina el concepto de poset reticulado.
   b) Pruebe que en un reticulado vale la desigualdad:
   $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
   c) Sea L un reticulado distributivo finito. Pruebe que si $x = sup(D)$, donde D es un conjunto decreciente de irreducibles, entonces $D = \{i \in Irr(L) : i \leq x\}$.