Introducción a la Lógica y la Computación - Práctico complementario.

(1) Considere los posets P_0, P_1 cuyos diagramas de Hasse se dan abajo. Para cada caso:
  (a) Muestre los elementos maximales y minimales, indicando además si existen máximo y mínimo.
  (b) Muestre los elementos que cubren a h.
  (c) Muestre $inf\{e, f, a\}$
  (d) Indique si es un poset reticulado.

(2) (a) Determine si el poset $(P_2, \subseteq)$ es reticulado, donde $P_2 = \{\ \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,b\},\ \{a,b,d\}\}$
  (b) Determine las cotas superiores del conjunto $A = \{2,3,6\}$ en el poset $(P_3, |)$, donde $P_3 = \{2,3,4,6,12,8,24\}$. ¿Tiene A supremo?

(3) Responda si es Verdadero o Falso. Justifique su respuesta.
  (a) En todo reticulado distributivo finito, el mayor elemento se puede escribir como supremo de átomos.
  (b) Para todo poset P de menos de 4 elementos, $\mathcal{D}(P)$ es un reticulado distributivo acotado.
  (c) Existe un n tal que D_n sea isomorfo a N_5.
  (d) Existe una biyección entre dos Álg. de Boole que preserve el $\vee$ pero no preserve el $\wedge$

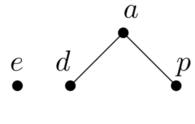
(4) Pruebe lo siguiente.
  (a) Sea L un reticulado. Entonces se satisface: $x \vee y \geq (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
  (b) Sea L un reticulado distributivo. Demuestre que el complemento es único. O sea, si $x \vee z = x \vee w = 1^L$ y $x \wedge w = x \wedge z = 0^L$, entonces $z = w$.

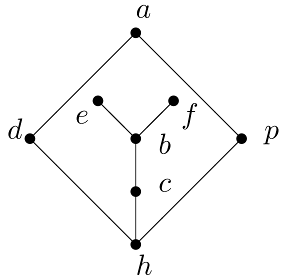
(5) Responda si es Verdadero o Falso. Justifique su respuesta.
  (a) El poset P_1 (abajo) es un reticulado distributivo.
  (b) Existe un reticulado distributivo de 24 elementos tal que todo elemento tiene al menos un complemento.

(6) Defina de manera explícita (punto por punto) el isomorfismo dado por el Teorema de Birkhoff para el reticulado D_{90}. No hace falta que haga el diagrama de Hasse.

(7) Considere el poset P dado abajo.
  (a) Dé el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(P)$.
  (b) ¿Es $\mathcal{D}(P)$ distributivo? Justifique su respuesta.
  (c) Supongamos que L es un reticulado que satisface que $Irr(L)$ es isomorfo a P. ¿Vale que L es isomorfo a $\mathcal{D}(P)$? Justifique su respuesta.

(8) Sea B un Álgebra de Boole finita. Pruebe que existe una única manera de escribir a cualquier elemento $x \in B$ como supremo de átomos. Enuncie formalmente este resultado y demuéstrelo. Debe probar todo resultado que utilice.

P:


P_0:


P_1: