Introducción a la Lógica y la Computación

Parte II: Lógica Proposicional

September 5, 2019

Ejes de Contenidos

¿Qué es Lógica (proposicional)?

- La lógica se entiende, en término generales, como el *análisis de los razonamientos correctos*.
- A fines del siglo XIX y principios del XX, se despierta un interés por dar bases sólidas a la matemática: comienza el desarrollo de la *lógica matemática*.
- Para ello se introducen sistemas lógicos en los que las fórmulas y los razonamiento válidos están establecidos sin ninguna referencia a lenguajes naturales (son objetos matemáticos).
- De esta manera se puede comprobar la validez de razonamientos por medios puramente sintácticos.

Ejemplo de razonamiento correcto

- Premisa 1: Si P es un poset finito, entonces P tiene al menos un maximal.
- Premisa 2: $(D_{32}, |)$ es un poset finito.
- Conclusión: D_{32} tiene al menos un maximal.

El patrón del ejemplo

El razonamiento tienen el siguiente esquema:

- Premisa 1: Si p_0, entonces p_1.
- Premisa 2: p_0
- Conclusión: p_1

Razonamiento incorrecto

- Premisa 1: Si L tiene un elemento con dos complementos, entonces L no es distributivo.
- Premisa 2: No hay elementos en L con dos complementos
- Conclusión: L es distributivo

Patrón del razonamiento incorrecto:

- Premisa 1: Si p_0, entonces $\neg p_1$.
- Premisa 2: $\neg p_0$
- Conclusión: p_1

Sintaxis, semántica y noción de demostración

Para estudiar matemáticamente los razonamientos válidos debemos saber representar los mismos de manera matemática. El primer paso será definir un conjunto de proposiciones: la *sintaxis*.

Una proposición será una secuencia de caracteres. Por ejemplo,

$$(p_1 \to (p_1 \vee \neg p_3))$$

representará una proposición, pero no representa una proposición la secuencia:

$$(p_0 \vee \ )$$

Sintaxis, semántica y noción de demostración

Cada proposición tiene asociado un valor de verdad (semántica).

Por ejemplo, podemos condicionar el valor de verdad de

$(p_1 \vee \neg p_3)$

al de p_1 y p_3: la proposición será verdadera si y sólo si p_1 es verdadera o p_3 es falsa.

p_1	p_3	$\neg p_3$	$(p_1 \vee \neg p_3)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Sintaxis, semántica y noción de demostración

Un conjunto de reglas puramente mecánicas nos permitirá definir la noción de demostración formal.

Por ejemplo,

$$\frac{p_0 \qquad p_0 \to \neg p_4}{\neg p_4} \qquad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ Hipótesis} \\ \longleftarrow \text{ Conclusión} \end{array}$$

Sintaxis, semántica y noción de demostración

Emergerán dos nociones distintas de "validez" o "verdad":

- Si p_1 es verdadero entonces $p_1 \vee \neg p_3$ es verdadero (noción de **verdad** dada por la tabla)
- Si las hipótesis p_0 y $p_0 \rightarrow \neg p_4$ valen, entonces vale la conclusión $\neg p_4$ (noción de **demostración**)

Pregunta:

¿qué relación habrá entre lo **verdadero** y lo **demostrable**?

El alfabeto

- Asumimos un conjunto numerable $\mathcal{V}$ de variables proposicionales que representan las afirmaciones más básicas.
- A los elementos de $\mathcal{V}$ los escribiremos simplemente como $p_0, p_1, \ldots$.
- Definimos $\mathcal{A}t = \mathcal{V} \cup \{\bot\}$, el símbolo $\bot$ representa la afirmación "es falso". A este conjunto $\mathcal{A}t$ lo llamamos el conjunto de *Átomos*.
- Las proposiciones serán ciertas palabras construidas sobre el alfabeto: $\Sigma = \mathcal{A}t \cup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\} \cup \{(,)\}$.

Palabras

- Al conjunto de palabras que se construyen con el alfabeto Σ lo denotamos con Σ^*.
- Ejemplos de palabras sobre Σ son:

$$p_0 \qquad \wedge\, p_0(p_1 \qquad (p_{23} \wedge p_9) \qquad (\neg\bot)$$

- Ejemplos de cadenas que *NO* son palabras sobre Σ:

$$4+0 \qquad x \leqslant y \wedge z \qquad A \vee B$$

- Pero no todas las palabras serán proposiciones.

Proposiciones

- Algunos elementos de Σ^* representan proposiciones:

$$p_2 \qquad p_{35} \qquad (\neg p_{35}) \qquad ((\neg p_{35}) \wedge p_2)$$

- ..., pero otras no:

$$\wedge p_0 (p_1 \qquad p_{23} \wedge \neg p_9 \vee p_2$$

- En la última podemos descubrir la necesidad de utilizar paréntesis.
- Pero, cómo definir un sub-conjunto $Prop \subseteq \Sigma^*$ que sólo contenga proposiciones?

Proposiciones

- Podemos definir conjuntos cada vez más grandes:

$$
\begin{aligned}
Prop_0 &= \mathcal{A}t \\
Prop_1 &= Prop_0 \cup \{(\neg\phi) \mid \phi \in Prop_0\} \\
&\quad \cup \{(\phi \,\square\, \psi) \mid \phi, \psi \in Prop_0\} \\
&\ldots \\
Prop_{k+1} &= Prop_k \cup \{(\neg\phi) \mid \phi \in Prop_k\} \\
&\quad \cup \{(\phi \,\square\, \psi) \mid \phi, \psi \in Prop_k\}
\end{aligned}
$$

- El conjunto de proposiciones es la unión de todos esos conjuntos: $Prop = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Prop_n$

Proposiciones

- Ahora daremos una definición *inductiva* del conjunto *Prop*.

$\phi \in \mathcal{A}t$	Si $\phi \in \mathcal{A}t$, entonces $\phi \in$ *Prop*;
$(\neg\phi)$	Si $\phi \in$ *Prop*, entonces $(\neg\phi) \in$ *Prop*;
$(\phi \vee \psi)$	Si $\phi \in$ *Prop* y $\psi \in$ *Prop*, entonces $(\phi \vee \psi) \in$ *Prop*.
$(\phi \wedge \psi)$	Si $\phi \in$ *Prop* y $\psi \in$ *Prop*, entonces $(\phi \wedge \psi) \in$ *Prop*.
$(\phi \rightarrow \psi)$	Si $\phi \in$ *Prop* y $\psi \in$ *Prop*, entonces $(\phi \rightarrow \psi) \in$ *Prop*.

Proposiciones

- Observación: podemos unificar las tres últimas cláusulas usando una meta-variable $\Box$ que puede ser $\vee$, $\wedge$ ó $\rightarrow$:

  [$(\phi \Box \psi)$] Si $\phi \in$ *Prop* y $\psi \in$ *Prop*,

  entonces $(\phi \Box \psi) \in$ *Prop*

Recursión en los naturales

- Si queremos definir una función $f : \mathbb{N} \to X$ de los naturales en algún conjunto X alcanza con:

$$\begin{array}{rl} n = 0 & \text{elegir } a \in X \text{ y definir } f(0) = a; \\ n = k + 1 & \text{definir } f(n) \text{ en términos de } f(k): \\ & f(k+1) = \ldots f(k) \ldots \end{array}$$

- Es fácil ver que de esa manera tenemos bien definida la función f.
- Puesto que *Prop* también es un conjunto definido inductivamente, podemos utilizar un esquema semejante.

Recursión en *Prop*

- Supongamos ahora que queremos definir una función $f\colon \mathit{Prop} \to X$.
- Ahora tenemos muchos casos base: $\perp$, p_0, p_1, ..., p_{2356},... por lo tanto debemos definir:

$$f(\phi) \quad = \quad ... \quad \text{si } \phi \in \mathcal{A}t$$

- Y tenemos varios casos recursivos, uno para cada conectivo; en el caso de la negación:

$$f((\neg\phi)) = \ldots f(\phi) \ldots$$

- Para las fórmulas de la forma $(\phi_1 \Box \phi_2)$, podemos utilizar la llamada recursiva tanto en ϕ_1 como en ϕ_2:

$$f((\phi_1 \Box \phi_2)) = \ldots f(\phi_1) \ldots f(\phi_2) \ldots$$

Recursión, ejemplos

- Cantidad de conectivos en una proposición:

$$
\begin{aligned}
con(-)&\colon Prop \to \mathbb{N}\\
con(\phi) &= 0 \qquad \text{si } \phi \in \mathcal{A}t\\
con((\neg\,\phi)) &= con(\phi) + 1\\
con((\phi_1 \,\square\, \phi_2)) &= con(\phi_1) + con(\phi_2) + 1
\end{aligned}
$$

- Cantidad de símbolos "(" y ")" en una proposición:

$$
\begin{aligned}
paren(-)&\colon Prop \to \mathbb{N}\\
paren(\phi) &= 0 \qquad \text{si } \phi \in \mathcal{A}t\\
paren((\neg\,\phi)) &= paren(\phi) + 2\\
paren((\phi_1 \,\square\, \phi_2)) &= paren(\phi_1) + paren(\phi_2) + 2
\end{aligned}
$$

Inducción en sub-fórmulas

- Así como podemos definir funciones recursivamente, también podemos probar propiedades sobre *Prop* utilizando *inducción*.
- Para probar que todo $\phi \in Prop$ satisface un predicado A, entonces alcanza con probar:

  $\phi \in \mathcal{A}t$ $A(\phi)$, para todo $\phi \in \mathcal{A}t$;

  $(\neg\,\phi)$ Si $A(\phi)$, entonces $A((\neg\,\phi))$;

  $(\phi \,\square\, \psi)$ Si $A(\phi)$ y $A(\psi)$, entonces $A((\phi \,\square\, \psi))$.
- Notemos que ese principio de inducción es análogo al principio de inducción para los naturales.

Inducción, ejemplo

Teorema Para toda $\phi \in Prop$, $paren(\phi) = 2 * con(\phi)$.

- Antes de intenar probarlo, enunciemos las hipótesis inductivas que tendremos a nuestra disposición:
- Si $\phi = (\neg\phi')$, entonces la hipótesis inductiva vale para ϕ', es decir:
$$paren(\phi') = 2 * con(\phi')$$
- Si $\phi = (\phi_1 \,\square\, \phi_2)$, ahora disponemos de la hipótesis inductiva tanto sobre ϕ_1 como sobre ϕ_2:
$$paren(\phi_1) = 2 * con(\phi_1) \qquad paren(\phi_2) = 2 * con(\phi_2)$$

Inducción, ejemplo

- Si $\phi \in \mathcal{A}t$, es fácil

$$paren(\phi) = 0 = 2 * 0 = 2 * con(\phi)$$

- Si $\phi = (\neg\, \phi')$, utilizando la hipótesis inductiva para ϕ' calculamos:

$$\begin{aligned} & paren((\neg\phi')) \\ &= paren(\phi') + 2 \\ &= (2 * con(\phi')) + 2 \\ &= 2 * (con(\phi') + 1) \\ &= 2 * con((\neg\phi')) \end{aligned}$$

Semántica de la Lógica Proposicional

- Las proposiciones representan afirmaciones, alcanza con utilizar **2**.
- Por ejemplo, establecimos que $\perp$ representaba la afirmación falsa.
- Para otras, *hoy llueve* (representada por alguna p_i) no podemos fijar su valor de verdad de una vez y para siempre.
- ¿Cuál es el valor de $(\neg\, p_1)$?

p_1	$(\neg\, p_1)$
0	1
1	0

- En general, el valor de $(\phi \,\Box\, \psi)$, dependerá del valor de ϕ y del de ψ.

Tabla de verdad

- En una tabla de verdad esa dependencia se hace patente.
- Cada línea de la tabla de verdad muestra una asignación de valores a las variables proposicionales:

p_0	p_1	p_2	$(\neg p_0)$	$((\neg p_0) \wedge p_1)$	$(((\neg p_0) \wedge p_1) \rightarrow p_2)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Completitud funcional

- Una función $\mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ puede describirse con una tabla de verdad.
- Dada una función $F\colon \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$, ¿existe una proposición ϕ tal que la tabla de verdad de ϕ sea justamente la función F?

p_0	p_1	p_2	$F(p_0, p_1, p_2)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Completitud funcional

- Un conjunto de conectivos es *funcionalmente completo*, si toda función $\mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ se puede describir como la tabla de verdad de una proposición que sólo utilice esos conectivos.

Semántica

- Los valores de las columnas que no son variables, quedan determinados unívocamente por los valores que adoptan las columnas que corresponden a las variables p_i.
- **Definición:** Una *asignación* es una función $f : \mathcal{V} \to \mathbf{2}$.
- Notar que en una tabla de verdad, listamos todas las asignaciones (cada fila corresponde con una asignación)

Semántica

- Dada una asignación f, el valor de verdad de una proposición se define recursivamente:

$$
\begin{aligned}
[\![-]\!]_f &: \mathit{Prop} \to \mathbf{2} \\
[\![p_i]\!]_f &= f\, p_i \\
[\![\bot]\!]_f &= 0 \\
[\![(\neg\, \phi)]\!]_f &= 1 - [\![\phi]\!]_f \\
[\![(\phi \wedge \psi)]\!]_f &= \min([\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f) \\
[\![(\phi \to \psi)]\!]_f &= \max(1 - [\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f) \\
[\![(\phi \vee \psi)]\!]_f &= \max([\![\phi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f)
\end{aligned}
$$

Teorema de Coincidencia

Si $f, f' : \mathcal{V} \to \mathbf{2}$ coinciden en las variables que ocurren en ϕ, entonces $[\![\phi]\!]_f = [\![\phi]\!]_{f'}$.

La prueba es por inducción en ϕ.

Lema (de sustitución) Sea f una asignación, tal que $[\![\psi_1]\!]_f = [\![\psi_2]\!]_f$. Entonces $[\![\phi[\psi_1/p_i]]\!]_f = [\![\phi[\psi_2/p_i]]\!]_f$.

Validez

- La asignación f *satisface* ϕ si $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- ϕ es una *tautología* (o es *válida*) si es satisfecha por toda asignación.
- Sea $\Gamma \subseteq$ *Prop*, decimos que f es un *modelo* de Γ, si para toda $\phi \in \Gamma$, f satisface ϕ.
- ¿Existe algún modelo de *Prop*?

Consecuencia lógica

- Si ϕ es una tautología, escribimos $\models \phi$.
- Decimos que ϕ es *consecuencia lógica* de Γ si todo modelo de Γ satisface ϕ. Lo escribimos $\Gamma \models \phi$.
- Como toda asignación es un modelo de $\emptyset$, entonces $\models \phi$ es lo mismo que $\emptyset \models \phi$.

Consecuencia lógica

- $\models (\phi \to \phi)$.
- Si $\phi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \models \phi$.
- $\{\phi, (\phi \to \psi)\} \models \psi$.
- $\not\models p_1$.

Teorema: (de sustitución) Si $\models (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$, entonces

$\models (\phi[\psi_1/p_i] \leftrightarrow \phi[\psi_2/p_i])$.

Noción de demostración

- Un razonamiento correcto es aquel que partiendo de ciertas *hipótesis* produce nuevos conocimientos.
- Para asegurarnos que las conclusiones son válidas debemos restringir las formas (las inferencias) en que producimos las conclusiones a partir de las premisas.
- Lo que vamos a dar a continuación es una serie de *reglas de inferencia* que nos aseguran que los razonamientos hechos usando esas reglas (y solo esas) son correctos.
- Por ahora nos vamos a restringir a los siguientes conectivos: $\wedge, \to, \bot$.

Reglas de inferencia

- Representaremos gráficamente las reglas de la siguiente manera:

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2 \qquad \cdots \qquad \phi_n}{\psi} \text{ nombre}$$

- Recordemos que tanto las ϕ_i como ψ son metavariables que pueden ser reemplazadas por cualquier proposición.

Reglas para la Conjunción

- Si conocemos (las asumimos como hipótesis o ya tenemos una prueba) ϕ y ψ, entonces podemos concluir $\phi \wedge \psi$.
- La regla formal se llama introducción de la conjunción:

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I$$

- Un ejemplo concreto del uso de esta regla es la siguiente prueba:

$$\frac{p_1 \qquad p_2}{p_1 \wedge p_2} \wedge I$$

- ¿Nos dice esa prueba que $p_1 \wedge p_2$ es válido?

Reglas para la Conjunción

- De saber $\phi \wedge \psi$ podemos deducir tanto ϕ como ψ.
- Tenemos entonces dos reglas para utilizar el conocimiento de una conjunción.
- La primera regla se llama eliminación de la conjunción:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E$$

- La segunda regla, que la llamamos con el mismo nombre, es:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

Ejemplos

- ¿Podemos derivar la validez de χ a partir de la validez de $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$?
- Si decimos que sí, debemos poder construir una prueba, una *derivación*, donde podemos usar varias veces las reglas de inferencia:

$$\dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\psi \wedge \chi}\ \wedge E}{\chi}\ \wedge E$$

- A partir de ahora, usaremos la expresión existe una *derivación de χ a partir de $\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$*.

Ejemplos

- ¿Podemos construir una derivación de $\phi \wedge (\psi \to \psi)$ a partir de ϕ y $(\psi \to \psi) \wedge \chi$? (Notar que tenemos varias premisas)

$$\dfrac{\phi \qquad \dfrac{(\psi \to \psi) \wedge \chi}{\psi \to \psi}\wedge E}{\phi \wedge (\psi \to \psi)}\wedge I$$

- Tanto en esta prueba como en la anterior, utilizamos la conclusión de una prueba como premisa para el uso de otra regla.

Premisas (hipótesis) y conclusión

- Llamamos *premisas o hipótesis* a todas las proposiciones que no fueron obtenidas como conclusión de una prueba.
- En el útimo ejemplo, las premisas son ϕ y $(\psi \to \psi) \wedge \chi$.
- Llamamos *conclusión* a la proposición que está en la raíz del árbol.
- A veces queremos referirnos a una derivación de ψ a partir de la premisa ϕ, entre otras:

$$\begin{array}{c} \phi \\ \\ \vdots\, D \\ \psi \end{array}$$

- Entre las premisas de *D* está ϕ; esto significa que esa proposición se ha utilizado 0, 1 o muchas veces (sin

Implicación

- Si *D* es una derivación de ψ a partir de ϕ, entonces *D* deberíamos poder obtener una derivación de $\phi \to \psi$.
- Pero cuando utilizamos la implicación (pensemos en el uso de "si . . . , entonces . . . "), queremos decir "si tuviéramos una prueba de ϕ".
- No queremos obligarnos a tener una prueba de ϕ, al menos hasta que queramos usar la implicación.
- Vemos entonces que cuando introducimos la implicación, quitamos la carga de la prueba sobre el antecedente.

Implicación

- Formalmente la regla de introducción de la implicación es:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \to I$$

- Aquí hay una diferencia con las anteriores reglas porque encorchetamos hojas donde esté ϕ, si queremos.
- Esa es la manera en que indicamos que *descargamos* (o *cancelamos*) la hipótesis ϕ.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\phi \wedge \psi]_1}{\phi}\wedge E}{\psi \wedge \phi}\wedge I}{(\phi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \phi)} \to I_1$$

- Como podemos utilizar varias veces la regla $\to I$, marcamos con un sub-índice aquellas hipótesis que cancelamos con cada uso de la regla.

Implicación

- La regla de eliminación de la implicación (¿cómo puedo usar una implicación?) es la conocida *modus ponens*:

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E$$

- Si definimos $\neg\phi$ como abreviatura de $\phi \to \bot$, entonces:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]_3 \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \neg\psi}{\bot} \to E}{\neg\phi} \to I_3$$

- En esta derivación, tenemos que las hipótesis no canceladas son $\phi \to \psi$ y $\neg\psi$.
- Pero podemos continuar con la derivación y cancelar todas las hipótesis.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]_3 \qquad [\phi \to \psi]_1}{\psi} \to E \qquad [\neg\psi]_2}{\perp} \to E}{\neg\phi} \to I_3}{\dfrac{\neg\psi \to \neg\phi}{(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)} \to I_1} \to I_2$$

Bottom

- Para $\perp$ no tenemos regla de introducción. ¿Por qué?
- Sin embargo, siempre que tengamos una prueba de $\perp$, podemos concluir lo que se nos antoje: "ex falso quodlibet".

$$\frac{\perp}{\phi}\ \perp E$$

- Ejemplo, recordemos que $\neg\phi$ es $\phi \to \perp$:

$$\dfrac{\dfrac{\phi \qquad \neg\phi}{\perp} \to E}{\psi}\ \perp E$$

- Es decir, podemos construir una derivación de ψ a partir de ϕ y $\neg\phi$.

Deducción natural

- La clase pasada introdujimos las reglas de inferencia que nos aseguran que si partimos de premisas válidas, entonces las conclusiones serán válidas.
- Si bien no lo explicitamos, mencionamos que las pruebas podían ser vistas como árboles.
- A las hojas (que no estaban entre corchetes) les llamábamos hipótesis o premisas; y a la raiz, conclusión.

Reducción al absurdo

- El uso habitual de reducción al absurdo es el siguiente: "para probar ϕ, asumí $\neg\phi$ y llegué a la conclusión $\perp$".
- La regla "reducción al absurdo" entonces tendrá como conclusión a ϕ y podremos cancelar todas las veces que queramos a $\neg\phi$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi]\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\phi}\ RAA$$

Reducción al absurdo: ejemplo

- Si tenemos como premisas $\neg\phi$ y $\neg\psi \to \phi$, entonces utilizando reducción al absurdo podremos concluir ψ

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]_2 \qquad \neg\psi \to \phi}{\phi} \to \mathit{E} \qquad \neg\phi}{\bot} \to \mathit{E}}{\psi}\, \mathit{RAA}_2
$$

Razonamiento correcto sólo en la lógica clásica

- Si tenemos como premisa $\neg\neg\phi$, entonces utilizando reducción al absurdo podremos concluir ϕ

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi \qquad [\neg\phi]_1}{\perp} \to E}{\phi}\ RAA_1$$

Más ejemplos

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]_3 \qquad [\neg\psi \to \neg\gamma]_1}{\neg\gamma} \to E \qquad [\gamma]_2}{\bot} \to E}{\psi}\, RAA_3}{\gamma \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\gamma) \to (\gamma \to \psi)} \to I_1$$

Derivaciones

- Decimos que ψ *se derivaba de* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ si existe una derivación con conclusión ψ y sus hipótesis no canceladas están entre $\phi_1, \ldots, \phi_n$.
- Para $\Gamma \subseteq Prop$ y $\psi \in Prop$, decimos que ψ *se deduce de* Γ si existe una derivación D tal que las hipótesis están contenidas en Γ y su conclusión es ψ. La notación que utilizamos es la siguiente $\Gamma \vdash \psi$.
- Si ψ se deduce del conjunto vacío, $\emptyset \vdash \psi$, entonces decimos que ψ es un *teorema*. Si ψ es un teorema nos ahorramos de escribir el conjunto vacío: $\vdash \psi$.

Derivaciones

- Si tenemos $\{\phi\} \vdash \psi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to \psi$?
- Si tenemos $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \chi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$?
- Este tipo de manipulaciones de derivaciones las podemos expresar como meta-teoremas: Si $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \chi$, entonces $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$.

El conjunto de derivaciones

Definiremos el conjunto de derivaciones, $\mathcal{D}$, como el menor conjunto que satisface (en varias filminas):

[(*Prop*)] Si $\phi \in$ *Prop*, entonces $\phi \in \mathcal{D}$.

El conjunto de derivaciones

($\wedge I$) Si $\begin{matrix} & \vdots \\ D_1 & \\ & \phi \end{matrix} \in \mathcal{D}$ y $\begin{matrix} & \vdots \\ D_2 & \\ & \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}$,

entonces $\dfrac{\begin{matrix} & \vdots \\ D_1 & \\ & \phi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \vdots \\ D_2 & \\ & \psi \end{matrix}}{\phi \wedge \psi} \wedge I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\wedge E)$ Si $\begin{matrix} & \vdots \\ D & \phi \wedge \psi \end{matrix} \in \mathcal{D}$, entonces $\begin{matrix} & \vdots \\ D & \dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E \end{matrix} \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to I)$ Si $\begin{array}{c} \phi \\ D \;\vdots \\ \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} [\phi] \\ D \;\vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to E)$ Si $D_1 \begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array} \in \mathcal{D}$ y $D_2 \begin{array}{c}\vdots\\ \phi \to \psi\end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{D_1 \begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array} \qquad D_2 \begin{array}{c}\vdots\\ \phi \to \psi\end{array}}{\psi} \to E \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

$(\bot E)$ Si $\begin{array}{c} D \\ \vdots \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\phi}\,\bot E \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$$(RAA)\ \text{Si}\quad \begin{array}{c} \neg\phi \\ D\ \vdots \\ \perp \end{array} \in \mathcal{D}\text{, entonces}\quad \dfrac{\begin{array}{c} [\neg\phi] \\ D\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi}\,RAA \in \mathcal{D}$$

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- Si quisiéramos justificar que un árbol está en $\mathcal{D}$, entonces deberíamos mostrar cómo lo vamos construyendo a partir del uso de la regla *Prop*, utilizando las cláusulas que dimos recién.
- Eso es demasiado engorroso y no lo haremos explícitamente, pero tengamos en cuenta que podríamos hacerlo.
- Pero entonces, para qué introducir $\mathcal{D}$? ¿Qué herramientas tenemos ahora a nuestra disposición?

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- Por un lado tenemos un principio de definición de funciones por recursión.
- Por otro lado, podemos usar inducción *en subderivaciones* para probar que una propiedad es cierta para toda derivación.
- ¿Para qué podemos usar ese principio de inducción en subderivaciones? Para probar la corrección: es decir fundamentar nuestro eslogan de que las reglas de inferencia preservan la verdad.
- Esto es: si $\Gamma \vdash \phi$ entonces $\Gamma \models \phi$.

Más conectivos

- Puesto que el conjunto $\{\wedge, \rightarrow, \perp\}$ era funcionalmente completo podamos contentarnos con esos conectivos.
- En esta clase daremos reglas de inferencia para: la negación ($\neg$), la doble implicación ($\leftrightarrow$) y la disyunción ($\vee$).

La negación

- Las reglas de la negación son muy fáciles de comprender si pensamos en cómo la habíamos definido en términos de $\rightarrow$ y $\perp$:
- Introducción:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg P}\ \neg I$$

- Eliminación:

$$\dfrac{P \qquad \neg P}{\perp}\ \neg E$$

La doble implicación, introducción

- Si pensamos que la doble implicación $\phi \leftrightarrow \psi$ se codifica como $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$, entonces no es sorprendente que la regla de introducción sea una combinación de las introducciones de $\rightarrow$ y de $\wedge$:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \phi\end{matrix}}{\phi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I$$

- Recordemos que las hipótesis que podemos descargar son ϕ en el sub-árbol de la izquierda y ψ en el sub-árbol de la derecha.
- NO podemos descargar ϕ en el sub-árbol de la derecha.

La doble implicación, eliminación

- Cuántas reglas habrá para eliminar la doble implicación?
- Puesto que lo codificamos como una conjunción, tendremos dos reglas de eliminación:

$$\frac{\phi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow E \qquad\qquad \frac{\psi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\phi} \leftrightarrow E$$

La disyunción, introducción

- La disyunción es el dual de la conjunción: mientras que para introducir una conjunción necesitamos pruebas de ambos términos, para la disyunción nos alcanza con uno.
- Por ello tenemos dos reglas de introducción:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee I \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee I$$

- Cuántas reglas de eliminación de la disyunción habrá?

La disyunción, eliminación

- Teniendo en cuenta la dualidad entre $\wedge$ y $\vee$ es esperable tener una única regla de eliminación de la disyunción.
- Pero, cómo podemos usar una disyunción $\phi \vee \psi$?
- Si suponiendo ϕ podemos concluir χ y si suponiendo ψ también podemos concluir χ, entonces podemos concluir χ a partir de cualquiera de las dos:

$$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi} \vee E$$

La disyunción, eliminación

- La regla de eliminación de la disyunción muestra cómo probar por casos χ:
- por un lado podemos suponer ϕ para probar χ y por lo tanto en el segundo sub-árbol podemos descargar ϕ;
- por otro lado podemos suponer ψ para probar χ, consecuentemente descargamos ψ del tercer sub-árbol.
- PERO no podemos descargar NI ϕ NI ψ en el primer sub-árbol, no al menos al usar esta regla!

Ejemplos de derivaciones con los nuevos conectivos

- $\{P \vee Q, \neg P\} \vdash Q$
- $\vdash P \vee \neg P$

Derivaciones

- Decimos que ψ *se deriva de* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ si existe una derivación con conclusión ψ y sus hipótesis no canceladas están entre $\phi_1, \ldots, \phi_n$.
- Para $\Gamma \subseteq$ *Prop* y $\psi \in$ *Prop*, decimos que ψ *se deduce de* Γ si existe una derivación D tal que las hipótesis están contenidas en Γ y su conclusión es ψ. La notación que utilizamos es la siguiente $\Gamma \vdash \psi$.
- Si ψ se deduce del conjunto vacío, $\emptyset \vdash \psi$, entonces decimos que ψ es un *teorema*. Si ψ es un teorema nos ahorramos de escribir el conjunto vacío: $\vdash \psi$.

Derivaciones

- Si tenemos $\{\phi\} \vdash \psi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to \psi$?
- Si tenemos $\{\phi \land \psi\} \vdash \chi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$?
- Este tipo de manipulaciones de derivaciones las podemos expresar como meta-teoremas: Si $\{\phi \land \psi\} \vdash \chi$, entonces $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$.

El conjunto de derivaciones

Definiremos el conjunto de derivaciones, $\mathcal{D}$, como el menor conjunto que satisface (en varias filminas):

(*Prop*) Si $\phi \in$ *Prop*, entonces $\phi \in \mathcal{D}$.

El conjunto de derivaciones

$(\wedge I)$ Si $\begin{array}{cc} & \vdots \\ D_1 & \phi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{cc} & \vdots \\ D_2 & \psi \end{array} \in \mathcal{D}$,

entonces $\dfrac{\begin{array}{cc} & \vdots \\ D_1 & \phi \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \vdots \\ D_2 & \psi \end{array}}{\phi \wedge \psi} \wedge I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\wedge E)$ Si $\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E \end{array} \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to I)$ Si $\begin{array}{cc} & \phi \\ D & \vdots \\ & \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{cc} & [\phi] \\ D & \vdots \\ & \psi \end{array}}{\phi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to E)$ Si $\begin{array}{c} D_1 \quad \vdots \\ \phi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} D_2 \quad \vdots \\ \phi \to \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \quad \vdots \\ \phi \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \quad \vdots \\ \phi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E \quad \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

$(\perp E)$ Si $\begin{array}{c} D \\ \vdots \\ \perp \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi}\,\perp E \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

(*RAA*) Si $\begin{array}{c} \neg\phi \\ D \quad \vdots \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\begin{array}{c} [\neg\phi] \\ D \quad \vdots \\ \dfrac{\bot}{\phi}\, RAA \end{array} \in \mathcal{D}$

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- Si quisieramos justificar que un árbol está en $\mathcal{D}$, entonces deberíamos mostrar cómo lo vamos construyendo a partir del uso de la regla *Prop*, utilizando las cláusulas que dimos recién.
- Eso es demasiado engorroso y no lo haremos explícitamente, pero tengamos en cuenta que podríamos hacerlo.
- Pero entonces, para qué introducir $\mathcal{D}$? ¿Qué herramientas tenemos ahora a nuestra disposición?

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- Por un lado tenemos un principio de definición de funciones por recursión.
- Por otro lado, podemos usar inducción *en subderivaciones* para probar que cierta propiedad es cierta para toda derivación.
- Para qué podemos usar ese principio de inducción en subderivaciones? Para probar la corrección: es decir fundamentar nuestro eslogan de que las reglas de inferencia preservan la validez (que si lo recuerdan lo denotábamos como $\models$).

Ejemplo de función (no tan) recursiva

- Definamos ahora mismo una función $\mathit{concl} : \mathcal{D} \to \mathit{Prop}$, que dada una derivación dice cuál es la conclusión de esa derivación:

$$\mathit{concl}(\phi) = \phi \qquad (\mathit{Prop})$$

$$\mathit{concl}\left(\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \vdots \\ \phi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \vdots \\ \psi \end{matrix}}{\phi \wedge \psi} \wedge I \right) = \phi \wedge \psi \qquad (\wedge I)$$

$$\mathit{concl}\left(\dfrac{\begin{matrix} D \\ \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{matrix}}{\phi} \wedge E \right) = \phi \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función recursiva

- Definamos ahora mismo una función $hip : \mathcal{D} \to \mathcal{P}(Prop)$, que dada una derivación dice cuáles son las hipótesis no canceladas de la derivación:

$$hip(\phi) = \{\phi\} \qquad (Prop)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \vdots \\ \phi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \vdots \\ \psi \end{matrix}}{\phi \wedge \psi} \wedge I \right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\wedge I)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{matrix} D \\ \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{matrix}}{\phi} \wedge E \right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función recursiva

$$hip\left(\begin{array}{c} \\ D \end{array} \dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \to I\right) = hip(D) \setminus \{\phi\} \qquad (\to I)$$

$$hip\left(\begin{array}{c} D_1 \end{array} \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \phi\end{array} \quad D_2 \quad \begin{array}{c}\vdots \\ \phi \to \psi\end{array}}{\psi} \to E\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\to E)$$

$$hip\left(D \; \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \bot\end{array}}{\phi} \bot E\right) = hip(D) \qquad (\bot E)$$

Lo que sigue: corrección

Teorema: Corrección

Si $\Gamma \vdash Q$, entonces $\Gamma \models Q$.

- Recordemos que $\Gamma \vdash Q$ significa que existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = Q$.
- El enunciado preciso que probaremos es:
  Para toda derivación D, si $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = Q$, entonces $\Gamma \models Q$.
- Para la prueba utilizaremos inducción en derivaciones.

Luego: completitud

Teorema: Completitud

Si $\Gamma \models Q$, entonces $\Gamma \vdash Q$.

- Como $\Gamma \models Q$, entonces para todo modelo f de Γ, $[\![Q]\!]_f = 1$;
- por lo tanto no existe modelo de $\Gamma \cup \{\neg Q\}$.
- Si no existe modelo de Δ, entonces $\Delta \vdash \bot$.
- Con el punto anterior y RAA podemos concluir $\Gamma \vdash Q$.

Repaso: Semántica

- Una asignación $f : \mathcal{V} \to \mathbf{2}$, induce la semántica $[\![-]\!]_f : Prop \to \mathbf{2}$.
- La asignación f satisface la fórmula ϕ si $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- f es modelo de $\Gamma \subseteq Prop$, si para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- ϕ es consecuencia lógica de Γ si todo modelo de Γ satisface ϕ.

Repaso: Deducción natural

- Construcción de pruebas usando reglas de inferencias.
- Definición por inducción del conjunto $\mathcal{D}$ de derivaciones.
- ϕ se deduce de Γ, $\Gamma \vdash \phi$, si existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = \phi$.
- Pero, realmente las reglas nos permiten concluir proposiciones verdaderas a partir de hipótesis verdaderas?

Derivabilidad y contra-ejemplos

- De los siguientes pares de afirmaciones ¿cuáles son correctas?

$$\{p_0, p_1\} \vdash p_2 \qquad \{p_0, p_1\} \nvdash p_2$$

$$\vdash \bot \qquad \nvdash \bot$$

- Y de estos pares que siguen, cuáles son correctos?

$$\{p_0, p_1\} \models p_2 \qquad \{p_0, p_1\} \not\models p_2$$

$$\models \bot \qquad \not\models \bot$$

Derivabilidad y contra-ejemplos

- ¿Cómo podemos probar o refutar las anteriores afirmaciones?
- Las segundas afirmaciones (aquellas que hablan de modelos) las podemos comprobar rápidamente construyendo las tablas de verdad.
- En cambio, para verificar la validez de una las primeras afirmaciones debemos o bien construir una derivación,
- o bien mostrar que no existe ninguna derivación con la conclusión esperada y las hipótesis permitidas.
- Por ejemplo, como podemos estar seguros que no podemos concluir $\perp$ utilizando una regla de eliminación o *RAA*?

Corrección

- Como la validez de las fórmulas está dada por su semántica, entonces podemos utilizar la noción de $\models$ para expresar la corrección.
- Una derivación $D \in \mathcal{D}$ con $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = \phi$ es *correcta* si todo modelo de Γ satisface ϕ.
- Nuestro trabajo será mostrar que toda derivación es correcta.

Derivabilidad y contra-ejemplos

- Volviendo a las pregunta del principio, suponiendo corrección, cómo podemos usar

$$\{p_0, p_1\} \not\models p_2 \qquad \text{y} \qquad \not\models \bot$$

para concluir

$$\{p_0, p_1\} \nvdash p_2 \qquad \text{y} \qquad \nvdash \bot$$

Derivabilidad y contra-ejemplos

- Si suponemos que existe una derivación para $\{p_0, p_1\} \vdash p_2$, entonces para toda asignación f de $\{p_0, p_1\}$, tendríamos $[\![p_2]\!]_f = 1$.
- Sin embargo la siguiente asignación es un contraejemplo:

$$\begin{aligned} f\,p_0 &= 1 \\ f\,p_1 &= 1 \qquad\qquad f\,p_j = 0 \qquad \text{para } j > 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, estamos en una contradicción y la derivación que supusimos no puede existir.

Teorema de corrección

- Para probar este teorema usaremos inducción en sub-derivaciones, para ello establecemos el siguiente predicado A sobre derivaciones.
- Sea $\begin{matrix} & \vdots \\ D & \\ & \phi \end{matrix}$, entonces $A(D)$ vale si y sólo si

  "para todo Γ tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models \phi$".

Teorema de corrección

- Por ejemplo, si D es la derivación $\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E$, entonces $A(D)$ vale.

  Tomemos Γ tal que $\phi \wedge \psi \in \Gamma$, comprobemos $\Gamma \models \phi$.
- Para ello tomemos un modelo f de Γ y verifiquemos $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- Como f es modelo Γ y $\phi \wedge \psi \in \Gamma$, entonces $[\![\phi \wedge \psi]\!]_f = 1$, por lo tanto $[\![\phi]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección

Teorema Si $\Gamma \vdash Q$, entonces $\Gamma \models Q$.

($Prop$) Sea D la derivación P y sea $\{P\} \subseteq \Gamma$, es inmediato $\Gamma \models P$.

($\wedge E$) Sea D la derivación D' $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P \wedge Q\end{array}}{P}\,\wedge E$

Puesto que D' es la subderivación de D, entonces podemos asumir la hipótesis inductiva para D':
para todo $\Gamma' \supseteq hip(D')$, se da
$\Gamma' \models P \wedge Q$.

Para mostrar $A(D)$, tomamos $\Gamma \supseteq hip(D)$ y probamos $\Gamma \models P$. Sea f una asignación arbitraria de Γ, veamos $[\![P]\!]_f = 1$.

Como $hip(D) = hip(D')$, para Γ tenemos $\Gamma \models P \wedge Q$, es decir $[\![P \wedge Q]\!]_f = 1$. De lo cual concluimos $[\![P]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

$(\wedge I)$ Sea D la derivación $\dfrac{\begin{matrix} D_1 \begin{matrix} \vdots \\ P \end{matrix} & D_2 \begin{matrix} \vdots \\ Q \end{matrix} \end{matrix}}{P \wedge Q} \wedge I$, veamos $A(D)$.

Asumimos la h.i. tanto para D_1 como para D_2

Sea $\Gamma \supseteq hip(D)$ y sea f una asignación de Γ. Como $hip(D_i) \subseteq hip(D) \subseteq \Gamma$, tenemos, aplicando la h.i. en D_1, $[\![P]\!]_f = 1$ y, análogamente usando la h.i. en D_2 sabemos $[\![Q]\!]_f = 1$. Por lo tanto, tenemos $[\![P \wedge Q]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

$(\rightarrow I)$ Sea D la derivación
$$\dfrac{\begin{array}{c}[P] \\ D' \quad \vdots \\ Q\end{array}}{P \rightarrow Q} \rightarrow I \quad .$$

En este caso asumimos que la h.i. vale para D': para todo $\Gamma' \supseteq hip(D_1)$, $\Gamma' \models Q$.

Teorema de corrección, cont.

$(\to I)$ Tomemos $\Gamma \supseteq hip(D)$ y f una asignación de Γ, probemos $[\![P \to Q]\!]_f = 1$, es decir $\max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = 1$.

Como $hip(D) = hip(D') \setminus \{P\}$, que f sea de Γ no nos dice nada sobre el valor de $[\![P]\!]_f$. Si $[\![P]\!]_f = 0$, entonces $\max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = \max(1 - 0, [\![Q]\!]_f) = 1$.

El otro caso es si $[\![P]\!]_f = 1$; pero ahora f es una asignación de $\Gamma \cup \{P\}$; usando la hipótesis inductiva en D', con $\Gamma' = \Gamma \cup \{P\}$, deducimos $[\![Q]\!]_f = 1$. De lo cual concluimos $\max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = \max(1 - [\![P]\!]_f, 1) = 1$.

Teorema de corrección, cont.

$(\to E)$ Sea D la derivación $\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \vdots \\ P \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \vdots \\ P \to Q \end{matrix}}{Q} \to E$.

En este caso asumimos la h.i. sobre D_1 y sobre D_2.

Sea $\Gamma \supseteq hip(D)$, entonces $\Gamma \supseteq D_i$. Sea f una asignación de Γ; por h.i., entonces $[\![P]\!]_f = 1$ y también $[\![P \to Q]\!]_f = 1$.

Es decir $1 = \max(1 - [\![P]\!]_f, [\![Q]\!]_f) = \max(0, [\![Q]\!]_f)$; por lo tanto, $[\![Q]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

(*RAA*) Sea D la derivación $\begin{array}{c} [\neg P] \\ D' \quad \vdots \\ \dfrac{\bot}{P}\, RAA \end{array}$.

Ahora podemos asumir la h.i. para D':

para todo $\Gamma' \supseteq hip(D')$, $\Gamma' \models \bot$!

Teorema de corrección, cont.

(RAA) Sea $\Gamma \supseteq hip(D') \setminus \{\neg P\}$ y sea f una asignación de Γ. Veamos $[\![P]\!]_f = 1$.

Supongamos que para toda f de Γ, tenemos $[\![P]\!]_f = 0$. Es decir, $[\![\neg P]\!]_f = 1$; por lo tanto f es de $\Gamma \cup \{\neg P\}$.

Eso nos permite utilizar la h.i. sobre D' y concluir $[\![\perp]\!]_f = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se debe dar $[\![P]\!]_f = 1$.

Teorema de corrección, cont.

($\perp E$) Sea D la derivación $\begin{array}{c} D' \quad \vdots \\ \dfrac{\perp}{P} \perp E \end{array}$

En este caso asumimos la h.i. sobre D'.

Sea $\Gamma \supseteq hip(D)$, entonces $\Gamma \supseteq hip(D')$. Sea f una asignación de Γ; por h.i., entonces $[\![\perp]\!]_f = 1$.

Lo útimo es absurdo y facilmente podemos concluir $[\![P]\!]_f = 1$.

Repaso

- Ahora podemos probar $\nvdash \bot$: Supongamos que $\vdash \bot$, entonces para toda asignación f tenemos $[\![\bot]\!]_f = 1$ por corrección. Pero eso es absurdo; por lo tanto no existe derivación con conclusión $\bot$ y todas sus hipótesis canceladas.
- El meta-teorema de corrección nos asegura que todo teorema es una tautología.
- Pero... sucederá lo recíproco? Es decir, podremos derivar todas las tautologías?
- En términos más generales: si $\Gamma \models P$, entonces $\Gamma \vdash P$?
- Es decir, se podrán hacer *todas* las derivaciones de premisas válidas a conclusiones válidas.

Semántica

- Una asignación $f : \mathcal{V} \to \mathbf{2}$, induce la semántica $[\![-]\!]_f : Prop \to \mathbf{2}$.
- La asignación f satisface la fórmula ϕ si $[\![\phi]\!]_f = 1$.
- f es modelo de $\Gamma \subseteq Prop$, si para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- ϕ es consecuencia lógica de Γ si todo modelo de Γ satisface ϕ.

Deducción natural

- Construcción de pruebas usando reglas de inferencias.
- Definición por inducción del conjunto $\mathcal{D}$ de derivaciones.
- ϕ se deduce de Γ, $\Gamma \vdash \phi$, si existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = \phi$.
- Pero, realmente las reglas nos permiten concluir proposiciones verdaderas a partir de hipótesis verdaderas?

El plan de la clase de hoy

- Queremos probar $\Gamma \models \phi$ implica $\Gamma \vdash \phi$.
- Si $\Gamma \models \phi$, entonces no existe ningún modelo $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$.
- Si no existe *f* de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \perp$. ¡Esto es lo difícil!
- Por lo tanto, $\Gamma \vdash \phi$ por *RAA*.

InConsistencia

- Un conjunto $\Gamma \subseteq$ *Prop* es ***inconsistente*** si $\Gamma \vdash \bot$.
- Un conjunto $\Gamma \subseteq$ *Prop* es *consistente* si $\Gamma \nvdash \bot$.
- Sea $\Gamma \subseteq$ *Prop*, Γ es inconsistente si y sólo si

  Existe $\phi \in$ *Prop* tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$.

  Para toda $\phi \in$ *Prop*, $\Gamma \vdash \phi$.

Consecuencias de inconsistencia

- Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \perp$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.
- Si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \perp$, entonces $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Criterios de consistencia

- ¿Cómo podemos saber si un conjunto Γ es consistente?
- Para probar que $\emptyset$ es consistente (es decir $\nvdash \bot$), usamos la contra-recíproca de corrección.
- Si existe un modelo Γ, entonces Γ es consistente.

  Sea f un modelo de Γ y supongamos $\Gamma \vdash \bot$ (para llegar a una contradicción). Entonces $[\![\bot]\!]_f = 1$: la contradicción que buscábamos. Por lo tanto $\Gamma \nvdash \bot$.
- ¿ $\{p_0, \neg p_1, p_2, \neg p_3, \ldots, p_{2*k}, \neg p_{2*k+1}, \ldots\}$ es consistente?
- Para ver que un conjunto Γ es inconsistente, debemos mostrar $\Gamma \vdash \bot$!

Consistentes maximales

- ¿Será cierta la vuelta del criterio de consistencia?
- Sea Γ es consistente, ¿existe un modelo de Γ?
- Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ no tiene un modelo. Entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente: $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$ Por lo tanto, $\Gamma \vdash \phi$.

Consistentes maximales

- Un conjunto $\Gamma \subseteq$ *Prop* es *consistente maximal* si
  para todo Δ consistente, $\Gamma \subseteq \Delta$ implica $\Delta = \Gamma$.
- Prácticamente, Δ es consistente maximal si no existe $\psi \notin \Delta$, tal que $\Delta \cup \{\psi\}$ siga siendo consistente.
- Los consistentes maximales son cerrados por derivación: si Δ es consistente maximal, entonces $\Delta \vdash \phi$ implica $\phi \in \Delta$.

Consistentes maximales

- Sea Δ un conjunto maximal, entonces Δ *realiza* los conectivos.
  1. Para toda $\phi \in$ *Prop*, $\phi \notin \Delta$ si y sólo si $\neg\phi \in \Delta$.
  2. $\phi \in \Delta$ y $\psi \in \Delta$ si y sólo si $\phi \wedge \psi \in \Delta$.

  3.a Si $\phi \in \Delta$ implica $\psi \in \Delta$, entonces $\phi \rightarrow \psi \in \Delta$.

  3.b Si $\phi \rightarrow \psi \in \Delta$, entonces $\phi \in \Delta$ implica $\psi \in \Delta$.
- En los tres casos concluimos que la proposición está en Δ, porque Δ es cerrado por derivaciones.

Consistentes maximales

- Supongamos que Δ es consistente maximal.
- Si sabemos que ciertas proposiciones están en Δ, entonces podemos saber que otras tambií©n están.
- Ejemplo: Si $\phi \in \Delta$, entonces $\psi \to \phi \in \Delta$, para todo ψ.
- Si Γ es consistente, entonces pueden existir varios Δ_i y consistentes maximales tales que $\Gamma \subseteq \Delta_i$.
- Ejemplo: $\emptyset$ es consistente (¿por qué?) y hay muuchos maximales que lo contienen.

Existencia de valuación

- Sea Δ consistente maximal, entonces para toda $\phi \in \mathit{Prop}$ o bien $\phi \in \Delta$ o bien $\neg\phi \in \Delta$.
- Si Δ es consistente maximal, entonces existe un modelo de Δ.
  Definamos $f\colon \mathcal{V} \to \{0, 1\}$ de la siguiente manera:

  $$\begin{array}{ll} f\,p_i = 1 & \text{si } p_i \in \Delta \\ f\,p_i = 0 & \text{si } p_i \notin \Delta \end{array}$$

  Probamos $[\![\psi]\!]_f = 1$ si y sólo si $\psi \in \Delta$, usando inducción en ψ.

Extension a maximales

- Para ver que todo conjunto consistente Γ tiene un modelo, lo extendemos a uno maximal Γ^*.
  Como las proposiciones son numerables, podemos pensarlas dadas por una lista infinita: $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$.

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \bot \\ \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \nvdash \bot \end{cases}$$

$$\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

- Γ^* es consistente maximal.

Recapitulando

- Si f es modelo de Δ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces f es modelo de Γ.
- Todo maximal tiene un modelo y todo consistente se extiende a uno maximal, por lo tanto todo consistente tiene un modelos.
- La contrarecíproca de lo anterior nos dice, si Γ no tiene un modelo, entonces Γ es inconsistente.

Teorema de completitud

Teorema Si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Supongamos $\Gamma \models \phi$. Entonces no existe *f* de $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$.
Entonces, por criterio de consistencia, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.
Por lo tanto $\Gamma \vdash \phi$.